TPE 1980 Option M, Math 2

Préliminaires

Ce problème a pour objet l'étude de la notion d'encombrement d'ensembles dans le plan. En raison du caractère géométrique des notions et des exemples, il y aura avantage à faire des figures ; mais la rigueur des démonstrations ne devra pas être négligée pour autant.
Les parties II, III, IV sont indépendantes.

Partie I

L'objet de cette partie est de définir la notion d'encombrement et d'en dégager quelques propriétés fondamentales.
On appelle $\mathcal{E}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance d associée à une norme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Si F et F' sont deux parties non vides de $\mathcal{E}$, on note

$$d(F,F') = \operatorname*{Inf}_{M\in F, M'\in F'} d(M,M')\,.$$

On note $B(M,r)$ la boule fermée de centre $M \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire $B(M,r) = \{N \in \mathcal{E} / d(M,N) \leqslant r\}$.
On notera d_2 la distance euclidienne et d_∞ la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ telle que $\|(x,y)\|_\infty = \mathrm{Sup}(|x|,|y|)$.

1°) a) Soit E une partie non vide et bornée de $\mathcal{E}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on peut recouvrir E par un nombre fini de boules fermées de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Constater l'existence de $N_E(\varepsilon)$, si $N_E(\varepsilon)$ désigne le plus petit nombre de boules fermées de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ dont la réunion recouvre E.
b) Montrer que si $(\varepsilon,\varepsilon') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ est tel que $\varepsilon < \varepsilon'$, on a $N_E(\varepsilon') \leqslant N_E(\varepsilon)$.
c) Si E' est une partie non vide de E, montrer que $N'_E(\varepsilon) \leqslant N_E(\varepsilon)$.
d) Soient $G_1, G_2, \ldots, G_n$ n ensembles bornés non vides vérifiant $d(G_i,G_j) > \varepsilon$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,\ldots n\}^2$ avec $i \neq j$; montrer que

$$N_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} N_{G_i}(\varepsilon)\,.$$

2°) On dit que E possède un paramètre d'encombrement si et seulement si :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} E \text{ est non vide et borné} \\ \text{il existe } p\in\mathbb{R} \text{ et } (A,B,\varepsilon_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ tels que} \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \varepsilon < \varepsilon_0 \implies \frac{A}{\varepsilon^p} \leqslant N_E(\varepsilon) \leqslant \frac{B}{\varepsilon^p} \end{array}\right.$$

a) Montrer que p ainsi défini est unique et ne dépend pas de la norme choisie (on rappelle qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes). p s'appellera désormais le paramètre d'encombrement de E.
b) Montrer que si E' est déduit de E par une homothétie, E vérifiant (1), alors E' vérifie (1).
c) Montrer que si E' est dense dans E (partie non vide bornée de $\mathcal{E}$), on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad (N_{E'}(\varepsilon) = N_E(\varepsilon))$$

(il est rappelé qu'un ensemble E est dense dans un ensemble F si tout point de F est la limite d'une suite de points de E).
En déduire que si E vérifie (1), E' et $\overline{E}$ (la fermeture ou adhérence de E) vérifient (1).
3°) Montrer que $\{(0,0)\}$ vérifie (1).
a) Soit $\ell \in \mathbb{R}_+^*$; on pose $E = [0,\ell] \times \{0\}$. On prendra $d = d_\infty$. Rappeler la forme des boules $B(M,r)$.
(i) Soient n couples (a_i,b_i) de réels tels que $b_i > a_i$ et $[0,\ell] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$. On appelle f_i la fonction caractéristique de l'intervalle $[a_i,b_i]$ (c'est à dire que $f_i(x) = 1$ pour $x \in [a_i,b_i]$ et $f_i(x) = 0$ sinon) En considérant

$$\int_{\operatorname*{Inf}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} b_i}^{\operatorname*{Sup}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} b_i} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) > \ell$.
(ii) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; soit B une boule fermée de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, telle que $B \cap E \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant b - a \leqslant \varepsilon$ et $B \cap E = [a,b] \times \{0\}$.
(iii) Montrer que :

$$(2) \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \left(\frac{\ell}{\varepsilon} \leqslant N_E(\varepsilon) \leqslant \frac{\ell}{\varepsilon} + 1\right).$$

En déduire que E vérifie (1).

Partie II

L'objet de cette partie est d'exhiber pour tout $p \in]0,2]$ un ensemble possédant p comme paramètre d'encombrement. On prendra $d = d_\infty$. Soit $k \in [3, +\infty[$. On pose

$$\begin{cases} F_{0,k} = \{-1, 0, 1\} \\ F_{1,k} = \{-1-\frac{1}{k}, -1, -1+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}, 1, 1+\frac{1}{k}\} \\ F_{n,k} = \big\{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists y \in F_{n-1,k} \ (|x-y| = \frac{1}{k^n} \text{ ou } x = y)\big\} \end{cases}$$

On pose $E_k = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_{n,k}$ et $E'_k = E_k \times \{0\}$.

1°) Montrer que E_k est borné ; en donner les bornes.

a) Montrer que E'_3 est dense dans un segment de l'axe $y = 0$ (on remarquera que $F_{n,3}$ divise l'intervalle $[\operatorname{Inf} F_{n,3}, \operatorname{Sup} F_{n,3}]$ en $3^{n+1} - 1$ intervalles de même longueur).

2°) On pose $F'_{n,k} = F_{n,k} \times \{0\}$. Montrer que la distance minimale entre deux points de $F'_{n,k}$ est $\frac{1}{k^n}$. En utilisant **I1°d)**, en déduire que

$$N_{F'_{n,k}}\Big(\frac{2}{k^{n+1}(k-1)}\Big) = 3^{n+1}$$

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \leqslant N_{E'_k}\Big(\frac{2}{k^n(k-1)}\Big) \leqslant 3^{n+1}$.

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; montrer que pour ε assez petit, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2}{k^{n+1}(k-1)} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{2}{k^n(k-1)}$$

Montrer, en posant $p = \frac{\ln 3}{\ln k}$, que

$$\frac{2^p}{9(k-1)^p \varepsilon^p} \leqslant N_{E'_k}(\varepsilon) \leqslant \frac{9.2^p}{(k-1)^p \varepsilon^p} \, .$$

En déduire que E'_k vérifie (1).

4°) a) On pose $E''_k = E_k \times E_k$ et $F''_{n,k} = F_{n,k} \times F_{n,k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F''_{n,k}$ est un ensemble de 3^{2n+2} points tels que si $(M, M') \in (F''_{n,k})^2$ avec $M \neq M'$, on a $d_\infty(M, M') \geqslant \frac{1}{k^n}$. En déduire que

$$N_{F''_{n,k}}\Big(\frac{2}{k^{n+1}(k-1)}\Big) = 3^{2n+2} \, .$$

b) En suivant une démarche analogue à la question 3), montrer que E''_k vérifie (1), avec $2p$ comme paramètre d'encombrement, où $2p$ décrit $]0,2]$ quand k décrit $[3, +\infty[$.

c) En déduire que $[-1,1] \times [-1,1]$ possède un paramètre d'encombrement égal à 2 et que, pour tout E possèdant un paramètre d'encombrement p, on a $p \leqslant 2$.

Partie III

L'objet de cette partie est d'exhiber une partie non vide bornée de $\mathcal{E}$ qui ne possède pas de paramètre d'encombrement. Soit $n \in \mathbb{N}*$. On pose : $G_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}]$ et $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} G_n$. On prendra $d = d_\infty$.

1°) Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe un et un seul $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{m(m+1)}$$

On pose : $H_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} G_n$. Montrer que $N_{H_m}(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ (on utilisera **I1°d)** et la proposition (2)).

a) En déduire qu'il existe $(\alpha, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_1[, \quad N_E(\varepsilon) \geqslant -\alpha \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon}$$

(on rappelle que : $\big(\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln m\big)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée).

2°) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $m' \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{1}{m'+1} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{m'}$. Montrer que :

$$E \subset B\big((\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{\varepsilon}{2}), \tfrac{\varepsilon}{2}\big) \cup \bigcup_{n=1}^{m'} G_n \, .$$

En déduire que :

$$N_E(\varepsilon) \leqslant 1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{n=1}^{m'} \frac{1}{n}\Big) + m'$$

(on utilisera la proposition (2)).

3°) En déduire que E ne possède pas de paramètre d'encombrement.

Partie IV

L'objet de cette partie est l'étude de l'encombrement de parties de images par une application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les questions 1) et 2) sont indépendantes.
On prendra $d = d_2$.
1°) Soit $f : [a,b] \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\mathcal{C} = f([a,b])$ que l'on suppose non réduit à un point.
a) Soit ℓ la longueur de $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_2[\quad N_{\mathcal{C}}(\varepsilon) \leqslant \frac{3\ell}{\varepsilon} .$$

b) Montrer que l'on peut recouvrir un segment de l'un des axes d'équation $x = 0$ ou $y = 0$ à l'aide de la projection sur cet axe (notée ϕ d'un recouvrement de $\mathcal{C}$ (on utilisera la continuité de $\phi \circ f$).
c) En déduire que $\mathcal{C}$ vérifie (1).
2°) On utilisera le résultat du **II4°c)** : $[-1,1] \times [-1,1]$ possède un paramètre d'encombrement égal à 2.
Soit $A \notin 0$, $A > 0$. On pose

$$g : \begin{cases} R & \to & \mathcal{E} \\ t & \mapsto & (\sin t, \sin At) \end{cases} \quad \text{et} \quad E = \mathcal{G}(\mathbb{R}) .$$

a) Montrer la densité de E dans $[-1,1] \times [-1,1]$ de la façon suivante :
(i) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nA - \mathrm{Ent}(nA)$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Ent}(x)$ désigne la partie entière de x.
Montrer que les $u_n \in [0,1[$ sont tous distincts.
En déduire qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leqslant n$ et $n_2 \leqslant n$ tels que $0 < u_{n_1} - u_{n_2} \leqslant \frac{1}{n}$.
(ii) En déduire la densité dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\{p + qA \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ puis la densité dans $[-1,1]$ de $\{\sin(At + (p + qA)2\pi) \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
(iii) En déduire le résultat, en approchant $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ par $(\sin(t_0 + 2\pi q), \sin(A(t_0 + 2\pi q))$ où $t_0 = \mathrm{Arcsin}\, x$.
b) En déduire que E possède un paramètre d'encombrement.