E.S.I.M. 1987, Option M - Épreuve de mathématiques II

Introduction

On considère un plan euclidien orienté $\mathcal{E}$, muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées polaires d'un point M, relatives à $\mathcal{R}$, seront notées (ρ, θ).

Lorsque le temps intervient, il s'agit d'un réel positif non nul. La vitesse algébrique d'un point mobile est la mesure algébrique de son vecteur vitesse sur la tangente orientée.

Les deux parties du problème sont totalement indépendantes

Partie I : Ovales de Cassini

On donne deux points F et F' de $\mathcal{E}$, de coordonnées cartésiennes respectives $(\ell, 0)$ et $(-\ell, 0)$, ℓ étant un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel $c > 0$ on note (Γ_c) l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $d(M,F).d(M,F') = 2\ell c$, en posant $d(M,F) = \|\overrightarrow{MF}\|$.

On posera $k = \frac{2c}{\ell}$.

1°) Donner une équation cartésienne de (Γ_c).

2°) On désigne par (ρ, θ) les coordonnées polaires, relatives à $\mathcal{R}$, d'un point M de (Γ_c).

a) Dans chacun des cas $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ exprimer ρ^2 en fonction de θ.

Montrer que si $k \geqslant 1$ on peut représenter (Γ_c) par une seule équation polaire de la forme $\rho = f(\theta)$. Lorsque $k < 1$, prouver que (Γ_c) est réunion de deux courbes (Γ'_c) et (Γ''_c), chacune d'entre elles étant représentée par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

b) Étudier, à partir des équations polaires précédentes, les variations de ρ en fonction de θ.

c) Déterminer les points de (Γ_c) où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{i}$ et ceux où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{j}$.

Indication: On sera amené à discuter de la position de k par rapport aux nombres 1 et 2.

3°) Montrer que chaque courbe (Γ_c) est soit le support d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, soit la réunion des supports de deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Calculer la courbure en un point M de (Γ_c) de coordonnées polaires (ρ, θ), en fonction de ρ, ℓ, et k.

b) En déduire l'étude des points d'inflexion de (Γ_c).

4°) Représenter graphiquement les différentes formes des courbes (Γ_c).

Partie II : De la lemniscate aux fonctions elliptiques

Soit (Γ) l'arc paramétré du plan $\mathcal{E}$ représenté par l'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, θ variant entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

1°) Déterminer les tangentes à (Γ) aux points de paramètres $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

En choisissant 10cm comme unité sur les axes, représenter (Γ).

2°) On note s l'abscisse curviligne le long de (Γ), comptée dans le sens des θ croissants et de sorte que le point A de coordonnées polaires $\theta = 0, \rho = 1$ vérifie $s = 0$. On utilise comme nouveau paramètre $u = u(\theta) = \tan\theta$, $u \in [-1, 1]$. Soit f la fonction réelle définie sur $[-1, 1]$ par la relation $s(\theta) = f(u(\theta))$ (θ variant entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$).

a) Exprimer $f(u)$ sous la forme d'une intégrale sur le segment $[0, u]$. Montrer que $\alpha = f(-1)$ et $\beta = f(1)$ existent.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque, définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Cette réciproque sera notée sn.

On définit alors deux autres fonctions réelles sur $[\alpha, \beta]$ par

$$\mathrm{cn} = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2} \text{ et } \mathrm{dn} = \sqrt{1 + \mathrm{sn}^2}\,.$$

3°) a) Montrer que les fonctions sn, cn, dn sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, et exprimer leurs dérivées en fonction de sn, cn, dn.

b) Soit Δ la partie de $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ obtenue en retirant la diagonale: $\Delta = \{(s,t) \in [\alpha, \beta]^2 \ / \ s \neq t\}$. On se propose de définir une fonction φ de Δ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\varphi(s,t) = \frac{\mathrm{dn}(s)\mathrm{cn}(t) - \mathrm{cn}(s)\mathrm{dn}(t)}{\mathrm{sn}(s) - \mathrm{sn}(t)} \, .$$

Justifier la définition de φ et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ.

Comparer les deux dérivées partielles premières de φ, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Soit alors k la fonction réelle de deux variables réelles définie par $k(v,w) = \varphi\left(\frac{v+w}{2}, \frac{v-w}{2}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de k. Montrer que k est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\dfrac{\partial k}{\partial w}$.

c) Déduire de ce qui précède qu'il existe une fonction réelle χ définie et continue sur $[2\alpha, 2\beta]$, telle que l'on ait $\varphi(s,t) = \chi(s+t)$ pour tout (s,t) de Δ.

4°) Dans les questions 5 et 6 on considère deux fonctions u_1 et u_2 définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}_+$, à valeurs dans $]-1, 1[$, et telles que l'on ait $|u_1(t)| \neq |u_2(t)|$ pour tout t (on pourra assimiler t au temps). On désigne par M_1 le point de (Γ) d'abscisse curviligne $s_1 = f(u_1(t))$, et M_2 de même. On suppose que pour tout t les vitesses algébriques de M_1 et M_2 sont opposées.

a) Montrer qu'il existe un réel non nul a tel qu'à chaque instant l'on ait

$$f(u_1) + f(u_2) = a \, .$$

b) En utilisant II.3.c. déduire de ce qui précède qu'il existe une constante λ telle que u_1 et u_2 vérifient l'équation

$$(\mathcal{F}_\lambda) \qquad 4\lambda^2 u_1^2 u_2^2 + \lambda^4 (u_2 - u_1)^2 + 4(u_1 + u_2)^2 - 4\lambda^2 = 0$$

On pourra se servir de la question précédente.

c) En posant $\sigma = u_1 + u_2$ et $\pi = u_1 u_2$, donner une condition sur σ et π.

5°) Soit le cercle $(\mathcal{C})$ passant par O, M_1, M_2 et Ω son centre, de coordonnées cartésiennes (x,y).

a) Donner une équation polaire de $(\mathcal{C})$.

b) On suppose que u_1 et u_2 vérifient $(\mathcal{F}_\lambda)$. Montrer que Ω appartient à une courbe (C_λ) dont on donnera une équation cartésienne.

c) On pose $x^2 = \frac{X}{T}$ et $y^2 = \frac{Y}{T}$. Montrer que si le point de coordonnées (x,y) vérifie l'équation de $(\mathcal{C}_\lambda)$ alors le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (X, Y, T) annule une certaine forme quadratique qu'on écrira.

Décomposer cette forme quadratique en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

d) Démontrer que (C_λ) est la réunion de deux coniques dont on précisera la nature et les foyers.