Centrale 1988, Option M, Maths. I.

Dans tout le problème, x et t désignent des réels. On se propose d'étudier quelques propriétés des séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ et $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$.

Partie I

1°) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que les séries entières $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ aient un rayon de convergence infini.
On désigne par $f(x)$ et $g(x)$ les sommes respectives de ces séries. On suppose de plus que a_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
a) Montrer que si b_n est négligeable devant a_n lorsque n tend vers $+\infty$, alors $g(x)$ est négligeable devant $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Il pourra être utile de mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$ et de faire le même travail pour $g(x)$, N étant convenablement choisi.
b) Que dire des comportements comparés de f et g en $+\infty$ lorsque l'on suppose cette fois que a_n et b_n sont équivalents lorsque n tend tend $+\infty$?
2°) a) Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x et tout t.
b) Montrer que l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ est continue et admet des dérivées partielles en x et t continues.
c) Quelle relation peut-on écrire entre $D_x\Phi(x,t)$ et $\Phi(x,t+1)$?
d) Établir, pour x tendant vers $+\infty$, t étant fixé, l'équivalence $\Phi(x,t+1) \sim x\Phi(x,t)$.
3°) a) Donner à l'aide de fonctions usuelles une expression de $\Phi(x,0)$, $\Phi(x,1)$, $\Phi(x,2)$.
b) Montrer que, pour t entier strictement positif, $\Phi(x,t)$ est le produit de e^x par un polynôme dont on précisera le terme de plus haut degré.
c) Donner, t étant un entier relatif fixé, un équivalent de $\Phi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie II

On se limite dans toute cette partie à $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $x > 0$.
1°) Établir, pour tout entier n strictement positif, les inégalités :

$$0 \leqslant (n+1)^t - n^t - t(n+1)^{t-1} \leqslant \tfrac{t-t^2}{2} n^{t-2} \leqslant \tfrac{1}{8} n^{t-2} .$$

2°) Établir pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout t l'inégalité : $n^{t-2} \leqslant 6 \frac{(n+2)^{t-1}}{n+1}$.
Le coefficient 6 peut-il être remplacé par une constante plus petite ?
3°) Déduire des deux questions précédentes l'existence d'une constante L telle que pour tout x et tout t on ait la double inégalité :

$$0 \leqslant D_x\Phi(x,t) - \left(1 + \tfrac{t}{x}\right)\Phi(x,t) \leqslant \tfrac{3}{4x^2}\Phi(x,t) + L.$$

On donnera une valeur numérique de L (on ne cherchera pas la meilleure possible).
4°) a) Vérifier que l'égalité : $D_x\Phi(x,t) = \Phi(x,t)\left[1 + \dfrac{t}{x} + \dfrac{\omega(x,t)}{x^2}\right]$ définit une application ω de $R_+^* \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction ω ainsi définie est positive et bornée. En donner un majorant M (on ne cherchera pas le meilleur possible).
b) Montrer que l'application ω est continue.
c) Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.
5°) a) Montrer que, pour tout t, il existe un réel strictement positif $K(t)$ tel que, pour tout x :

$$\Phi(x,t) = K(t) x^t e^x \exp\left(-\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2}\,\mathrm{d}u\right).$$

b) En déduire la double inégalité : $K(t)x^t \exp\left(x - \frac{M}{x}\right) \leqslant \Phi(x,t) \leqslant K(t)x^t\exp(x)$ et donner, à l'aide de t, un équivalent de $\Phi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie III

1°) Établir la continuité de l'application qui au réel $t \in [0,1]$ associe $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2}\,\mathrm{d}u$. En déduire la continuité de l'application qui au réel $t \in [0,1]$ associe $K(t)$ (cf. II5).
2°) On donne deux réels positifs t et β tels que $t+\beta \leqslant 1$. On admet que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^t \left(1-\frac{k}{n}\right)^\beta = \frac{1}{2^{t+\beta}}\,.$$

Établir alors que, lorsque x tend vers $+\infty$: $\Phi(x,t)\Phi(x,\beta) \sim e^{2x} x^{t+\beta} K(t+\beta)$.
3°) Soit H une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^*$ telle que $H(0) = H(1) = 1$ et telle que, pour tout couple de réels positifs (t,β) tels que $t+\beta \leqslant 1$, l'on ait : $H(t+\beta) = H(t)H(\beta)$. Établir que H est constante. Qu'en déduire pour la fonction K ?
4°) Déduire de ce qui précede un équivalent de $\Phi(x,t)$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'abord pour t compris entre 0 et 1, puis pour t réel quelconque.

Partie IV

1°) a) Montrer que, pour tout couple (x,t) de réels, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$ est convergente ; on désignera sa somme par $\Psi(x,t)$.
b) *On suppose dans la suite* $x > 0$. Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} (\Phi(x,u) - x)\,\mathrm{d}u$ et comparer sa valeur $\Psi(x,t)$.
2°) On donne t et β tels que $t < \beta$. Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\Psi(x,t)$ est négligeable devant $\Psi(x,\beta)$.
3°) On suppose $0 < t \leqslant 1$. En utilisant l'inégalite établie, dans ce cas, en (II.5.) pour $\Phi(x,t)$, trouver un équivalent de $\Psi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.
4°) Étendre le résultat trouvé ci-dessus au cas où t est un réel quelconque.