# Correction ENS Lyon 88 M'

## Partie 1

1. $u$ et $-u$ commutent, donc $I_E = \exp(u-u) = \exp u \circ \exp(-u) = \exp(-u) \circ \exp u$, donc $\exp u$ est inversible, d'inverse $\exp(-u)$.

2. (a) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (vuv^{-1})^k = v\left(\sum_{k=0}^{m} u^k\right)v^{-1}$, d'où en faisant tendre $m$ vers $+\infty$, par continuité du produit dans $L_{\mathbb{C}}(E)$, $\exp(vuv^{-1}) = v(\exp u)v^{-1}$.
Comme tout endomorphisme sur $\mathbb{C}$, $u$ est trigonalisable, donc il existe une matrice $v$ inversible telle que $vuv^{-1}$ soit triangulaire supérieure (on confond ici endomorphisme et matrice associée dans une base fixée). On note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ la diagonale de cette matrice. En calculant une somme finie puis en passant à la limite, $\exp(vuv^{-1})$ est encore triangulaire supérieure, de diagonale $(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots e^{\lambda_n})$. Les valeurs propres de $u$ et de $vuv^{-1}$ étant identiques (avec les mêmes ordres de multiplicité), on obtient celles-ci sur la diagonale de la matrice triangulaire $vuv^{-1}$.

   (b) $\det(\exp u) = \det(v(\exp u)v^{-1}) = \det(\exp(vuv^{-1})) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = e^{\mathrm{tr}(vuv^{-1})} = e^{\mathrm{tr}\ u}$.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en la considérant comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr}\, A}$, or $\mathrm{tr}\, A \in \mathbb{R}$, donc $e^{\mathrm{tr}\, A} \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\exp \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

3. $A = aI + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $N^2 = 0$ et que $I$ commute avec toute matrice,
$\exp A = \exp(aI).\exp N = e^a.(I+N) = e^a \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même en transposant, $\exp B = e^b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$.
$A + B = \begin{pmatrix} a+b & \mu \\ \mu & a+b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a+b+\mu & 0 \\ 0 & a+b-\mu \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (recherche des espaces propres). On en déduit $\exp(A+B) = P \begin{pmatrix} e^{a+b+\mu} & 0 \\ 0 & e^{a+b-\mu} \end{pmatrix} P^{-1} = e^{a+b} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\mu & \mathrm{sh}\,\mu \\ \mathrm{sh}\,\mu & \mathrm{ch}\,\mu \end{pmatrix}$.
Après calcul, $\exp A.\exp B = e^{a+b} \begin{pmatrix} 1+\mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$, donc $\exp(A+B) = \exp A.\exp B \iff \mu = 0$ (i.e $A = aI, B = bI$).

## Partie 2

1. $(I_E+tu)\dfrac{d}{dt}l(I_E+tu) = (I_E+tu)\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(-tu)^i = (I_E+tu)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}t^{i-1}u^i = u + (-1)^n t^{n-1}u^n = u$ car $u^n = 0$ (le polynome minimal de $u$ est une puissance de $X$ et est de degré $\leqslant n$ par Cayley-Hamilton, donc $u^n = 0$).

2. (a) Comme à la question précédente, $\gamma(t)^n = 0$ pour tout $t$, donc $\exp\gamma(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma(t)^k}{k!}$.
$\gamma$ étant à valeurs dans une sous-algèbre commutative, on a $\gamma(s).\gamma(t) = \gamma(t).\gamma(s)$ $\forall s, t$, donc en dérivant par rapport à $t$, $\gamma(s).\gamma'(t) = \gamma'(t).\gamma(s)$, d'où $\dfrac{d}{dt}\left(\gamma(t)^k\right) = k\gamma'(t)\gamma(t)^{k-1}$(récurrence).
Par suite, $\dfrac{d}{dt}(\exp\gamma(t)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \gamma'(t)\frac{\gamma(t)^{k-1}}{(k-1)!} = \gamma'(t)\exp\gamma(t)$.

   (b) On choisit $\gamma(t) = l(I_E + tu)$. On remarque que pour tout $t$, $\gamma(t) = u.P(u)$, où $P \in \mathbb{C}[X]$. $u$ étant nilpotent, il en est de même de $\gamma(t)$, qui est en outre élément de la sous-algèbre

commutative $\mathbb{C}[u]$.
D'après (a), $f'(t)=\gamma'(t)\exp\gamma(t)$, donc $(I_E+tu).f'(t)=u.f(t)$ d'après 1.
En redérivant, on obtient $\forall t,\ u.f'(t)+(I_E+tu)f''(t)=u.f'(t)$, d'où $(I_E+tu).f''(t)=0$. $u$ étant nilpotent, il est trigonalisable à spectre nul, donc $(I_E+tu)$ est trigonalisable à spectre réduit à 1, donc inversible, ce qui implique $f''(t)=0$ pour tout $t$. En intégrant deux fois, on obtient $f(t)=At+B$, avec $B=f(0)=\exp l(I_E)=I_E$ et $A=f'(0)=u.f(0)=u$, soit $f(t)=I_E+tu$. En prenant $t=1$, on en déduit que $\exp l(I_E+u)=I_E+u$.

3. $\lambda\in\mathbb{C}^*$, donc il s'écrit $|\lambda|e^{i\alpha}$, où $|\lambda|>0$. Par conséquent, $\lambda I_E+u=\lambda(I_E+\frac{u}{\lambda})=\lambda\exp l(I_E+\frac{u}{\lambda})=\exp\left((\ln|\lambda|+i\alpha)I_E+l(I_E+\frac{u}{\lambda})\right)$.

4. Soit $u\in\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynome caractéristique. On pose $F_k=\mathrm{Ker}\,(u-\lambda_k I_E)^{\alpha_k}$ et $u_k=u|_{F_k}$. $F_k$ étant stable par $u$, $u_k$ est un endomorphisme de $F_k$ tel que $u_k-\lambda_k I_{F_k}$ est nilpotent. D'après 3, il existe $a_k\in\mathcal{L}(F_k)$ tel que $\exp a_k=u_k$. On définit alors $a\in\mathcal{L}(E)$ par $\forall k\in\{1\dots p\},\ a|_{F_k}=a_k$. Par le lemme des noyaux, $E=\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant p}F_k$, donc $\exp a=u$ par restrictions aux $F_k$. CQFD

<u>Application</u>: On pose $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$. On doit avoir $\exp(P^{-1}AP)=P^{-1}(\exp A)P=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On cherche $A$ sous la forme $PA'P^{-1}$. La matrice $A'=\begin{pmatrix}i\pi&-2&0\\0&i\pi&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ vérifie $\exp A'=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Il en résulte que $A=PA'P^{-1}=\begin{pmatrix}i\pi&-2&-2\\0&i\pi&i\pi-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ est une solution de l'équation.

5. Le polynome $l$ introduit dans cette partie est à coefficients réels, donc la démarche précédente s'applique encore dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et conduit à $\exp l(I_E+v)=I_E+v$ lorsque $v$ est nilpotent. Si $\lambda>0$, on en déduit alors que $\lambda I_E+u=\lambda\left(I_E+\frac{u}{\lambda}\right)=\exp\left[(\ln\lambda)I_E+l(I_E+\frac{u}{\lambda})\right]$.

# Partie 3

1. L'application $\Phi:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\longrightarrow&\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ a+ib&\longmapsto&\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres continu.
Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\Phi(a+ib)^k}{k!}=\Phi\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(a+ib)^k}{k!}\right)$.
Pour $n\to\infty$, on obtient par continuité de $\Phi$ : $\exp\left(\Phi(a+ib)\right)=\Phi\left(\exp(a+ib)\right)=\Phi(e^a\cos b+ie^a\sin b)$, d'où finalement
$\exp\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=e^a\begin{pmatrix}\cos b&-\sin b\\\sin b&\cos b\end{pmatrix}$.
<u>Autre méthode :</u> $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}a+ib&0\\0&a-ib\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}$, donc d'après I,
$\exp\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^{a+ib}&0\\0&e^{a-ib}\end{pmatrix}P^{-1}=e^a\begin{pmatrix}\cos b&-\sin b\\\sin b&\cos b\end{pmatrix}$.

2. En utilisant la question précédente, $\exp\begin{pmatrix}0&-\pi\\\pi&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Prenant à présent $B=\begin{pmatrix}\ln(-\lambda)&-\pi\\\pi&\ln(-\lambda)\end{pmatrix}$ et $A=\begin{bmatrix}B&0&\dots&0\\0&B&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&B\end{bmatrix}$ on obtient $\exp B=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$, puis en calculant par blocs $\exp A=\lambda I_{2n}$.

3. On pose $A=\begin{bmatrix}0&-\pi I_n\\\pi I_n&0\end{bmatrix}$. On vérifie aisément que $A$ commute avec $\begin{bmatrix}B&0\\0&B\end{bmatrix}$ pour toute matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\exp A=-I_{2n}$ par un calcul par blocs calqué sur celui de la question 1.

On en déduit que $\exp A.\exp(B\oplus B)=\exp(A+B\oplus B)$ d'où $-\exp(B\oplus B)\in\exp\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Application</u> : Soit $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$. $B^2=0$, donc $C=I_2+B=\exp B$. On pose alors $U=\begin{bmatrix}0&-\pi I_2\\ \pi I_2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B&0\\0&B\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-\pi&0\\0&0&0&-\pi\\ \pi&0&0&-1\\0&\pi&0&0\end{pmatrix}$. Nous venons de prouver que

$\exp U=-\exp(B\oplus B)=-\begin{bmatrix}C&0\\0&C\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

# Partie 4

1. (a) Soit $P=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}$. Alors $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}a&-\operatorname{Im}a\\ \operatorname{Im}a&\operatorname{Re}a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $P=\begin{bmatrix}I_n&iI_n\\iI_n&I_n\end{bmatrix}$. $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}I_n&-iI_n\\-iI_n&I_n\end{bmatrix}$, d'où $P^{-1}(A\oplus\overline{A})P=\begin{bmatrix}\dfrac{A+\overline{A}}{2}&-\dfrac{A-\overline{A}}{2i}\\ \dfrac{A-\overline{A}}{2i}&\dfrac{A+\overline{A}}{2}\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

2. Il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $V=P^{-1}UP$, i.e $UP=PV$. On décompose $P$ en $Q+iR$ où $Q$ et $R$ appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de sorte que $UQ=QV$ et $UR=RV$, donc $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ U(Q+\lambda R)=(Q+\lambda R)V$. Soit $\Delta(X)=\det(Q+XR)\in\mathbb{R}[X]$. $\Delta(i)\neq0$, donc $\Delta$ n'est pas le polynome nul. Il possède un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$, et en particulier $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \Delta(\lambda)\neq0$, soit $Q+\lambda R\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $U$ et $V$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. $\begin{bmatrix}A&0\\0&\overline{A}\end{bmatrix}$ est semblable à $B$ qui est inversible, donc $A$ est inversible. D'après II4, $\exists U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A=\exp U$, d'où $\overline{A}=\overline{\exp U}=\exp\overline{U}$ (la conjugaison est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$), donc en calculant par blocs, $A\oplus\overline{A}=\exp(U\oplus\overline{U})$. D'après 1b, $U\oplus\overline{U}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à une matrice $R\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, et d'après I, $A\oplus\overline{A}$ est donc semblable à $\exp R$, donc $B$ est semblable à $\exp R$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Ces deux matrices étant réelles, elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, d'où $\exists P\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}),\ B=P^{-1}(\exp R)P=\exp(P^{-1}RP)$, soit finalement $B\in\exp\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

4. (a) Si $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ B=A\oplus A=A\oplus\overline{A}\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, donc d'après 3, $B\in\exp\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

   (b) Le polynome caractéristique de $B$ s'écrit $\prod_{1\leqslant k\leqslant r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}(X-\overline{\lambda_k})^{\alpha_k}$ où les $\lambda_k$ sont réelles et distinctes. Par le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant r}\left(\operatorname{Ker}(B-\lambda_kI)^{\alpha_k}\oplus\operatorname{Ker}(B-\overline{\lambda_k}I)^{\alpha_k}\right)$. On pose alors $E=\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant r}\operatorname{Ker}(B-\lambda_kI)^{\alpha_k}$, d'où facilement $\mathbb{C}^n=E\oplus\overline{E}$, $E$ étant un $\mathbb{C}$-e.v stable par $B$.
   En se plaçant dans une base adaptée à $E\oplus\overline{E}$ et en notant $P$ la matrice de passage de la base canonique vers celle-ci, il vient $P^{-1}BP=A\oplus\overline{A}$, où $A$ est une matrice représentant la restriction de $B$ à $E$. D'après 3, $B\in\exp\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

# Partie 5

1. Supposons l'existence d'une matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp A=B$. $\lambda$ et $\mu$ étant les valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$, on a d'après I2 : $\exp\lambda=\exp\mu=-1$, donc $\lambda$ et $\mu$ sont non réelles, donc complexes conjuguées (donc distinctes). Par conséquent, $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc $B$ également d'après I2, ce qui n'est pas vrai car $-1$ est la seule valeur propre de $B$ et $B\neq-I_2$.

2. (a) Prenons $u=B\oplus B$, avec $B=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$. D'après IV4a, $u\in\exp\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, mais $u|_F=B$, donc $u|_F\notin\exp\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F)$.

   (b) Soit $v\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u=\exp v$. $v$ commute avec $u$, donc avec $P(u)$ d'où $v(F)\subset F$, donc $\exp(v|_F)=(\exp v)|_F=u|_F$.

(c) On pose $F = \operatorname{Ker}(J_\lambda - \lambda I_n)$. $F$ est stable par $J_\lambda$ et $F$ est la droite $\mathbb{R}e_1$. S'il existait $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $J_\lambda = \exp A$, alors d'après la question précédente, $J_\lambda|_F = \exp(A|_F)$, donc $Ae_1 = \alpha e_1$, avec $e^\alpha = \lambda$, ce qui est exclu avec $\alpha$ réel et $\lambda < 0$.

3. (a) $\chi = \chi_2.\chi_1^+.\chi_1^-$, or ces trois polynomes sont deux à deux premiers entre eux et $\chi(u) = 0$ (Cayley-Hamilton), donc par lemme des noyaux, $E = \operatorname{Ker}\chi_2(u) \oplus F^+ \oplus F^-$.

   (b)
   - D'après V2b, si $u \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(E)$, alors $u|_{F^-} \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(F^-)$.
   - Supposons $\underline{u|_{F^-} \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(F^-)}$. D'après IV4b, $\underline{u|_{\operatorname{Ker}\chi_2(u)} \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(\operatorname{Ker}\chi_2(u))}$ car il ne possède aucune valeur propre réelle.
     On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ les valeurs propres $> 0$ de $u$, et $\chi_1^+ = \prod_{1 \leqslant k \leqslant r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Par lemme des noyaux, $F^+ = \operatorname{Ker}\chi_1^+(u) = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant r} F_k$, où $F_k = \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)^{\alpha_k}$. Soit $u_k = u|_{F_k} \in \mathcal{L}(F_k)$. $u_k - \lambda_k I_{F_k}$ est nilpotent et $\lambda_k > 0$, donc par II5, $u_k \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(F_k)$. On concatène les blocs pour en déduire que $\underline{u|_{F^+} \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(F^+)}$. D'après 3a, on déduit des trois propriétés soulignées (par concaténation des restrictions) que $u \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(E)$.

4. (a) Si $u = \exp v$, où $v \in \mathcal{L}_\mathbb{R}(E)$, $\dfrac{v}{2}$ commute avec elle-même et $v = \dfrac{v}{2} + \dfrac{v}{2}$, d'où $u = \left(\exp \dfrac{v}{2}\right)^2$, donc $u$ est un carré dans $\mathrm{GL}_\mathbb{R}(E)$.

   (b) $v$ commute avec $u$ donc avec $\chi_1^-(u)$, donc $v$ laisse stable $F^-$. Si $\lambda$ est valeur propre réelle de $v|_{F^-}$, alors $\lambda^2$ est valeur propre de $u|_{F^-}$, dont les valeurs propres sont $< 0$, ce qui prouve que $v|_{F^-}$ n'admet aucune valeur propre réelle. En utilisant IV4b, on en déduit que $v|_{F^-} \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(F^-)$ donc $\exists w \in \mathcal{L}_\mathbb{R}(F^-)$, $v|_{F^-} = \exp w$, d'où $u|_{F^-} = (v|_{F^-})^2 = (\exp w)^2 = \exp 2w$. D'après 3b, $u \in \exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(E)$.
   En conclusion, $\exp \mathcal{L}_\mathbb{R}(E)$ est l'ensemble des carrés de $\mathrm{GL}_\mathbb{R}(E)$.