CENTRALE M 89 - MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.

On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2)$$

et telles que, de plus, on ait $U_0 \geq 0$ et $U_1 \geq 0$.

On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.

Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'existe, par U_n .

Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ .

La partie IV ne dépend que de la partie I.

Première partie

Généralités

- I.1.a)** Déterminer les suites constantes appartenant à S .
- b) Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, d'une suite appartenant à S ?
- c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.
- d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.
- e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?
- I.2.** Soit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à S et *non constante*.
- a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- b) Montrer que, s'il existe $N \geq 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_N et à U_{N-1} , la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
- On établirait de même que, s'il existe $N \geq 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_N et à U_{N-1} , la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.
- c) Déterminer les limites des suites $U(x, y)$ pour $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ et pour $(x, y) = (2, 0)$.
- I.3.** Soit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N , la suite $(U_n)_{n \geq N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. *On ne cherchera pas, dans cette question, à démontrer l'existence de telles suites.*
- Montrer que les deux suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones et de sens contraire. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. On pourra montrer que U_0 et U_1 sont distincts et envisager les deux cas $U_0 > U_1$ et $U_0 < U_1$.
- I.4** Établir, pour une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non constante appartenant à S , l'équivalence des propriétés suivantes :
- a) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \geq 1$ et $U_{N+1} \geq 1$.
- b) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
- c) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété **a)**, tous ses termes, sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1.
- I.5.** Établir de même, pour une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de S non constante, l'équivalence des propriétés suivantes :
- a) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \leq 1$ et $U_{N+1} \leq 1$.
- b) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
- c) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

I.6. Montrer que les ensembles $E_0, E_1, E_{+\infty}$ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on montre que E_1 a au moins deux éléments.

Pour $(x, y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x, y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, y)$.

1. Comparer $\lambda(x, y)$ et $\lambda(x', y')$ dans l'hypothèse où $x \leq x'$ et $y \leq y'$.
 2. On considère deux couples (x, y) et (x', y') de Q . On suppose de plus que $U(x, y)$ converge vers 1.
- a) Soit $\varepsilon > 0$ un réel donné. Montrer que si l'on a pour un entier N :

$$U_{N-1}(x, y) + \varepsilon \leq U_{N-1}(x', y') \text{ et } U_N(x, y) + \varepsilon \leq U_N(x', y')$$

alors, pour tout $n \geq N$ on a : $U_n(x, y) + \varepsilon \leq U_n(x', y')$.

- b) Donner la valeur de $\lambda(x', y')$ dans les deux cas suivants :
- $x \leq x', y \leq y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.
 - $x \geq x', y \geq y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.
- 3.a) Montrer qu'il existe un réel a , borne supérieure de l'ensemble des $x \geq 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul.
- 3.b) Que dire de $\lambda(x, 0)$ pour $0 \leq x < a$?
- c) Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de a . On justifiera la méthode employée.
- 4.a) Montrer que, pour tout n , la fonction $x \mapsto U_n(x, 0)$ est continue.
- b) Montrer que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers zéro, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a + \varepsilon, 0)$ tende vers zéro ; on pourra pour cela utiliser la question **I.5**.
- c) Montrer de même que ; si la suite $U(a, 0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a - \varepsilon, 0)$ tende vers $+\infty$.
- d) En déduire $\lambda(a, 0)$. Que vaut $\lambda(x, 0)$ pour $x > a$?
- e) Montrer que, pour $y > 0$, la suite $(U_n(a, y))_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Troisième partie

Étude de E_0, E_1, E_∞ . (Ces notations sont définies dans le préambule)

1. Soit x compris au sens large entre 0 et a . Établir l'existence d'un point unique de E_1 ayant l'abscisse x . On note désormais $\varphi(x)$ l'ordonnée de ce point, et Γ la courbe décrite par le point $(x, \varphi(x))$ quand x varie de 0 à a .
Déterminer à l'aide de Γ les ensembles E_0, E_1, E_∞ .
- 2.a) Montrer que φ décroît. Déterminer $\varphi(1)$ et $\varphi(a)$.
- b) À l'aide de la relation

$$U_n(x, y) = U_{n-1}\left(y, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$
 établir, pour $x \in [0, a]$, la relation $x^2 + \varphi^2(x) = 2\varphi(\varphi(x))$.
- c) Calculer $\varphi(0), \varphi\left(\frac{a^2}{2}\right)$.
- 3.a) Soit y tel que $0 \leq y \leq \varphi(0)$. Montrer qu'il existe un point unique de E_1 d'ordonnée y . On notera $\psi(y)$ l'abscisse de ce point.
- b) Montrer que φ est strictement décroissante.
- c) Montrer que φ est continue.
- 4.a) Étudier les variations de $x^2 + \varphi^2(x)$ pour $x \in [0, a]$. En déduire que Γ est localisée dans une couronne circulaire que l'on précisera.
- b) Établir, pour $x \in [0, a]$, l'inégalité $\varphi(x) \geq \sqrt{ax - x^2}$. Qu'en résulte-t-il pour le comportement de φ au voisinage de a ?
- c) En admettant que φ soit dérivable en $x = 1$, calculer $\varphi'(1)$.

Quatrième partie

Étude de la rapidité de la croissance des suites croissantes de S .

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque appartenant à S . Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités

$$\frac{1}{2}U_n^2 \leq U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{2}U_n^2$$

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$.

On pose $V_n = \frac{1}{2}U_n$ et $z_n = 2^{-n} \ln(V_n)$.

- a) Établir que la suite (z_n) tend vers une limite L (utiliser la série de terme général $z_{n+1} - z_n$). Cette limite dépend de U_0 et de U_1 , on ne cherchera pas à la calculer.
- b) Sous les mêmes hypothèses, établir pour n assez grand la double inégalité

$$L - \frac{1}{2^n V_n} < z_n < L$$

En déduire un équivalent de U_n quand $n \rightarrow +\infty$ (on posera $e^L = M$).

Que peut-on dire de la différence entre U_n et cet équivalent ?

3. On prend $U_0 = U_1 = 2$. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de L à 10^{-6} près. Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de U_{20} ?
4. Ici on considère une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à S , non constante, et tendant vers 0. Établir qu'à partir d'un certain rang, on a

$$U_{n+1} \leq U_{n-1}^2$$

En déduire l'existence de deux constantes $A > 0$ et $B > 1$ telles que pour tout n , l'on ait $U_n \leq A \cdot B^{-2^{n/2}}$.