

Notations et objectif du problème

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels : le produit scalaire et la norme associée sont notés $(\cdot | \cdot)$ et $\| \cdot \|$.

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E on note $G^\perp$ l'orthogonal de G dans E . On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est somme directe orthogonale de r sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_r$ de E si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$, et si ces sous-espaces sont orthogonaux deux à deux.

Dans tout le problème, on suppose donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de E dont E est somme directe orthogonale, de dimensions respectives non nulles p et $n - p$. On suppose données des bases orthonormales $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $B_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ de E_1 et de E_2 , dont la réunion $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ fournit une base orthonormale de E .

On désigne respectivement par I_1, I_2 et I les applications identiques de E_1, E_2 et E et par les mêmes symboles les matrices-unités associées.

On suppose données une application linéaire f de E_1 dans E_2 et une application linéaire g de E_2 dans E_1 telles que, pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E_1 et E_2 on ait

$$(1) \quad (f(x_1)|x_2) = (x_1|g(x_2)).$$

L'objectif du problème est d'étudier l'endomorphisme φ de l'espace E qui, à tout élément x de E , écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ (où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$), associe

$$(2) \quad \varphi(x) = kx_1 + f(x_1) + g(x_2),$$

où k est un nombre réel donné.

Dans la première partie, on détermine la matrice associée à φ ainsi que le noyau et l'image de cet endomorphisme φ . Dans la troisième partie, on étudie les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ dans le cas où le réel k est nul et, dans la quatrième partie, les valeurs propres et les sous-espaces propres lorsque ce réel k est non nul. La deuxième partie est consacrée à l'étude, utile pour la suite, des valeurs propres et des sous-espaces propres des applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Partie I

1°) Matrice associée à φ .

a) Soit S la matrice associée à f dans les bases B_1 et B_2 ; déterminer en fonction de S la matrice associée à g dans ces bases B_2 et B_1 .

b) Montrer que, f étant donnée, il existe une application linéaire g et une seule satisfaisant à la relation (1).

c) Exprimer, à l'aide des matrices I_1 et S , la décomposition par blocs de la matrice T associée à φ , dans la base B .

2°) Étude des noyaux et des images de f et de g .

a) Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } g)^\perp \cap E_1$ et $\text{Ker } g = (\text{Im } f)^\perp \cap E_2$.

b) En déduire que E_1 est somme directe orthogonale de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } g$. Prouver que l'injectivité de f équivaut à la surjectivité de g , et que dans ces conditions $p \leq n - p$.

c) Énoncer des résultats analogues pour les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } g$ et $\text{Im } f$.

d) En utilisant a), exprimer $(\text{Ker } f)^\perp$ et $(\text{Ker } g)^\perp$ à l'aide de $\text{Im } g$ et $\text{Im } f$.

3°) Étude du noyau de φ .

a) On suppose $k = 0$. Exprimer le noyau $\text{Ker } \varphi$ à l'aide de $\text{Ker } f$ et de $\text{Ker } g$.

b) On suppose $k \neq 0$. Déterminer le noyau de φ . Pour cela, on considérera un élément x de $\text{Ker } \varphi$, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ et on prouvera que x appartient à $\text{Ker } f \cap \text{Im } g$.

4°) Étude de l'image de φ .

a) Prouver que l'endomorphisme φ est symétrique.

b) En déduire $\text{Im } \varphi$ à l'aide de $\text{Im } f$ et de $\text{Im } g$.

Partie II : Éléments propres de $g \circ f$ et $f \circ g$

Pour tout nombre réel λ , on note

$$U_\lambda = \text{Ker}(\lambda I_1 - g \circ f), \quad V_\lambda = \text{Ker}(\lambda I_2 - f \circ g), \quad F_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - \varphi).$$

1°) Indiquer des propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres F_λ de φ .

2°) a) Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E_1 et que les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles et positives.

b) Étudier de même les valeurs propres de $f \circ g$.

3°) Prouver les deux relations $U_0 = \text{Ker } f$ et $V_0 = \text{Ker } g$.

4°) a) Soit λ un nombre réel non nul. Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$ si et seulement si λ est valeur propre de $f \circ g$: établir $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$, et $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$.

b) Démontrer que si le réel λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$ les deux inclusions précédentes sont des égalités. Comparer les dimensions de U_λ et V_λ .

5°) Étude d'un exemple.

On suppose $p = 3$, $n = 4$ et $S = (a, b, c)$ où a, b, c sont trois réels donnés vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f \circ g$ et de $g \circ f$ et vérifier les résultats précédemment obtenus.

Partie III : Éléments propres de φ lorsque $k = 0$

On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels propres F_λ de φ en fonction des sous-espaces vectoriels propres U_λ de $g \circ f$ et de V_0 ; le réel k est nul dans cette partie.

1°) Exprimer F_0 à l'aide de U_0 et V_0 . En déduire que φ est un automorphisme de E si et seulement si f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

2°) On désigne par σ la symétrie de E associée à la décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, définie par $\sigma(x) = x_1 - x_2$, lorsque $x = x_1 + x_2$.

a) Montrer : $\varphi \circ \sigma = -\sigma \circ \varphi$.

b) En déduire que pour tout réel λ , $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de φ sont deux à deux opposées et comparer les dimensions des deux sous-espaces propres de φ correspondants.

3°) Soit λ un nombre réel non nul. On note h_λ l'application de E_1 dans E définie par : $h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x_1 + \frac{1}{\lambda}f(x_1)]$.

a) Prouver que $F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda^2})$. (On pourra établir successivement les deux inclusions opposées.)

b) Montrer que, pour tout couple (x_1, y_1) d'éléments de U_{λ^2} ,

$$(h_\lambda(x_1)|h_\lambda(y_1)) = (x_1|y_1).$$

c) En déduire que λ est valeur propre de φ si et seulement si λ^2 est valeur propre de $g \circ f$.

4°) a) Établir que E est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f$, $\text{Ker } g$, $F_{\sqrt{\mu}}$ et $F_{-\sqrt{\mu}}$, où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres non nulles de $g \circ f$.

b) On se place dans le cas particulier où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 . Alors $n = 2p$. On désigne par F_+ (respectivement par F_-) la somme directe des sous-espaces propres $F_{\sqrt{\mu}}$ (respectivement des sous-espaces propres $F_{-\sqrt{\mu}}$), où μ décrit l'ensemble des valeurs propres de $g \circ f$.

À partir d'une base orthonormale B'_1 de vecteurs propres de $g \circ f$ construire une base B'_+ de F_+ , et une base B'_- de F_- . En déduire une base B' orthogonale de vecteurs propres de φ .

c) On se place toujours dans le cas où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 . Exprimer la matrice de passage Q de B à B' en fonction de la matrice de passage P de B_1 à B'_1 , de la matrice S et d'une matrice D diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est égal à celui des valeurs propres de $g \circ f$.

Partie IV : Valeurs propres de φ lorsque $k \neq 0$

Dans cette partie le réel k est différent de 0.

1°) a) Déterminer F_0 ; à quelle condition le réel 0 n'est pas valeur propre de φ ?

b) Déterminer F_k ; à quelle condition le réel k n'est pas valeur propre de φ ?

c) Démontrer que si λ est une valeur propre de φ différente de 0 et de k , les éléments, différents de 0, de F_λ ont des composantes simultanément différentes de 0.

2°) a) Soit λ un réel différent de 0 et de k : établir, avec les notations de la question III3° :

$$F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)}).$$

b) Montrer que $\frac{k}{2}$ ne peut être valeur propre et que les valeurs propres de φ vérifient des inégalités simples.

3°) a) Exprimer $\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi$ à l'aide de σ et de I .

b) Soit λ une valeur propre de φ différente de 0 et de k . Établir que le réel $k - \lambda$ est valeur propre de φ en montrant qu'il existe un réel a_λ tel que :

$$(a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda}.$$

4°) En déduire la liste des sous-espaces propres F_λ de φ dont la somme directe orthogonale est égale à E .

FIN DU PROBLEME