E. N. S. I . de PHYSIQUE Option P-Math 1, 1990

Durée : 4 heures

Dans la première partie de ce problème, on étudie la série de Fourier d'une fonction f et on en déduit quelques résultats numériques. Dans la deuxième partie on établit un résultat utile pour la suite. Enfin la troisième partie propose l'étude du comportement des sommes partielles de la série de Fourier de f au voisinage d'un point de discontinuité de cette fonction.

I-1-a. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f, impaire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Déterminer cette fonction f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan euclidien pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

I-1-b. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

I-1-c. La série de Fourier de f :

i : converge-t-elle simplement vers f sur $\mathbb{R}$?

ii : converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

On justifiera, avec soin, les réponses données en 1.c.i, ii.

Dans les questions I-2-b, I-3-b et I-4-c suivantes, on ne demande aucun calcul approché, mais une valeur exacte de la somme des séries considérées.

I-2-a. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

I-2-b. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

I-3-a. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$

I-3-b. En utilisant les résultats obtenus en I-1 et la formule de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

I-4-a. Pour tout entier p au moins égal à 1, déterminer un réel α tel que, notant $\mathrm{E}(\alpha)$ sa partie entière, on ait : $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=0}^{\mathrm{E}(\alpha)} \frac{1}{(2j+1)^2} - \sum_{j=\mathrm{E}\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}^{p} \frac{1}{(2j)^2}$.

On pourra remarquer que $\dfrac{3}{4} = 1 - \dfrac{1}{2^2}$.

I-4-b. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left[\sum_{j=\mathrm{E}\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}^{p} \frac{1}{(2j)^2}\right]$.

I-4-c. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II- On considère la fonction h, de la variable réelle t, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h(t) = \dfrac{\sin t}{t} \text{ si } t \text{ est différent de } 0 \end{cases}$$

II-1- Étudier la continuité et la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de la dérivée h' de h.

II-2- Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$.

II-3- Montrer que h est développable en série entière ; écrire ce développement et déterminer son rayon de convergence.

II-4- Soit H la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt$.

II-4-a. Montrer que H admet un développement en série entière du type $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^{2n+1}$, les nombres a_n étant des nombres strictement positifs que l'on explicitera en fonction de n ; déterminer le rayon de convergence de cette série.

II-4-b. On désigne par q un entier au moins égal à 1 et on pose pour tout réel x :

$$P_q(x) = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n a_n x^{2n+1}, R_q = \sum_{n=q}^{+\infty} (-1)^n a_n x^{2n+1}.$$

i : Démontrer que, pour tout q, il existe une constante k telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $|R_q(x)| < kx^{2q+1}$.

ii : Déterminer q_0 tel que $|R_{q_0}(\pi)| < 10^{-3}$.

iii : Déterminer $P_{q_0}(\pi)$ et montrer que l'on peut en déduire une valeur approchée de $H(\pi)$ avec une erreur inférieure à $0,5.10^{-3}$. Préciser une telle valeur.

III- On se propose, dans ce qui suit, d'étudier le comportement des sommes partielles de la série de Fourier de la fonction f introduite dans la première partie. On désigne toujours par x une variable réelle et on considère les suites de fonctions (S_n) et (g_n) respectivement définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\sin(2q-1)x}{2q-1}$$

et $\forall x \in [0, 2n\pi], \forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(0) = 1$; $g_n(x) = \dfrac{\frac{1}{2n}\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}$ si $0 < x < 2n\pi$; $g_n(2n\pi) = -1$.

III-1-a. Étudier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la périodicité et la parité de S_n.

III-1-b. Soit (C_n) la courbe représentative de S_n dans un repère orthonormé du plan euclidien et (C'_n) l'arc de courbe obtenu en supposant que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que (C_n) se déduit de (C'_n) à l'aide de transformations géométriques simples que l'on précisera.

III-1-c. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $[0, 2n\pi]$.

III-2-a. Exprimer, pour $x \in]0, \pi[$, la dérivée $S'_n(x)$ de $S_n(x)$ en fonction de $\sin x$ et de $\sin 2nx$.

III-2-b. Résoudre l'équation : $x \in [0, \pi], S'_n(x) = 0$. Les solutions de cette équation seront notées $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1}$.

III-3- Pour $x \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_{k,n} = \int_0^{k\pi} g_n(x)dx \text{ avec } k \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\},\ J_n = \int_0^{\pi} (g_n(x) - h(x))dx.$$

III-3-a. Déterminer le nombre de maximums, de minimums, de S_n sur $]0, \pi[$, les coordonnées de chacun d'eux, et exprimer leurs ordonnées en fonction des intégrales $I_{k,n}$.

III-3-b. Établir une relation entre $S_n(x_1)$, $H(\pi)$, J_n.

III-4-a. Supposant que l'on ait $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, déterminer le signe des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 respectivement définies par :

$$\phi_1(x) = \frac{x}{\sin x} - 1 \,;\, \phi_2(x) = \frac{x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}.$$

III-4-b. Déduire de ce qui précède :

i : que $S_n(x_1) - \dfrac{1}{2}H(\pi)$ garde un signe constant à préciser, quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$

ii : que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} S_n(x_1) > \dfrac{\pi}{4}$.

III-4-c. Montrer que le résultat obtenu ci-dessus en 4-b permet de retrouver celui obtenu en I-l-c-ii.