EIVP 1990, Mathématiques Appliquées - Corrigé

Auteurs : Robert Cabane et Roger Dallard (rcabane@free.fr)

Question préliminaire

a) On peut écrire $u_n = (-1)^n \int_0^\pi g(s+n\pi)\sin s\,ds$, ce qui montre immédiatement que $(-1)^n u_n$ est positif et décroît comme g ; on le majore par $g(n\pi)\int_0^\pi \sin s\,ds = 2g(n\pi)$, ce qui tend vers 0. Finalement, la série Σu_n converge selon le théorème des Séries Alternées. Nous noterons $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. *Remarque :* la dérivabilité de g n'a pas servi ; il suffit que g soit décroissante, de limite nulle.

b) Soit $X > 0$ et $n = E(X/\pi)$ l'entier tel que $n\pi \leqslant X < (n+1)\pi$. On a donc : $\int_0^X g(t)\sin t\,\mathrm{d}t = S_{n-1} + \int_{n\pi}^X g(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ et $\left|\int_0^X g(t)\sin t\,\mathrm{d}t - S_{n-1}\right| \leqslant \int_{n\pi}^X g(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t = |u_n|$ et ceci tend vers 0 quand X tend vers l'infini (n aussi). Il en résulte que $\lim \int_0^X g(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \lim S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. *Même remarque que ci-dessus.*

c) Il s'agit d'une application du Théorème des Séries Alternées ; en effet, on sait que la somme d'une série alternée est comprise entre les sommes partielles d'indice pair et celles d'indices impairs. Ici, le premier terme (u_0) est positif, donc on a pour tout entier N : $S_{2N+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant S_{2N}$. En prenant $N = 0$, on obtient bien :

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi} g(t)\sin t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} g(t)\sin t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} g(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Même remarque que ci-dessus.

d) Nous intégrons par parties avec des bornes *finies*, ce qui donne : $\int_x^y g(t)\sin t\,\mathrm{d}t = g(x)\cos x - g(y)\cos y + \int_x^y g'(t)\cos t\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale se majore : $\left|\int_x^y g'(t)\cos t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |\int_x^y g'(t)\,\mathrm{d}t| = g(x) - g(y)$ puisque g est décroissante. Au total, il vient $\left|\int_x^y g(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant g(x) + g(y) + g(x) - g(y) = 2g(x)$. *Remarque :* Cette propriété reste vraie sans l'hypothèse de dérivabilité, mais il faut envisager une preuve différente (par découpage).

Partie I

1°) Les intégrales proposées convergent absolument pour $n > 1$. En général, S_n converge par application de la question préliminaire à la fonction $g_x(t) = \dfrac{1}{(t+x)^n}$. On ramène C_n à une intégrale du même type en posant $t = s - \pi/2$, d'où $C_n(x) = \int_{\pi/2}^{\infty} \dfrac{\sin s}{(s+x+\pi/2)^n}ds$, ou en intégrant par partie (question suivante).

2°) a) On intègre C_n par parties, il vient $C_n(x) = nS_{n+1}(x)$.

b) D'après la question préliminaire, $S_n(x)$ est positive pour tous n et x, donc $C_n(x)$ l'est aussi.

c) On intègre S_n par parties, trouvant $S_n(x) = \dfrac{1}{x^n} - nC_{n+1}(x)$, d'où en décalant et en combinant les relations : $S_n(x) = \dfrac{1}{x^n} - n(n+1)S_{n+2}(x)$. Sachant que $S_n \geqslant 0$, on obtient ici que $0 \leqslant S_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x^n}$.

d) Les inégalités précédentes entraînent aussitôt $\lim_{+\infty} S_n(x) = 0$, d'où $\lim_{+\infty} C_n(x) = 0$.

3°) Bien que ce ne soit pas demandé, nous essaierons de justifier le nombre d'intervalles utilisés pour approcher ces intégrales. Considérons la première. La formule d'erreur dans la méthode de Simpson s'écrit : $\dfrac{(b-a)^5 \operatorname{Sup}|f^{(4)}|}{2880n^4}$ si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est calculée avec n intervalles (donc $2n+1$ points). La dérivée quatrième de la fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{(t+5)^7}$ se calcule suivant la formule de Leibnitz, et se majore en majorant les sinus et cosinus par 1, en minorant $t+5$ par 5. Il vient :

$$\operatorname*{Sup}_{0\leqslant t\leqslant\pi} |f^{(4)}(t)| \leqslant \frac{1}{5^7} + \frac{4\times 7}{5^8} + \frac{6\times 7\times 8}{5^9} + \frac{4\times 7\times 8\times 9}{5^{10}} + \frac{7\times 8\times 9\times 10}{5^{11}} = \frac{5529}{5^{10}}$$

Avec $n = 20$ on majore l'erreur par $\dfrac{5529\pi^5}{2880\times 5^{10}\times 20^4} < 4\,10^{-10}$, ce qui est compatible avec la précision demandée. Puis on calcule $\int_\pi^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, avec une erreur bien moindre, et encore compatible avec la précision demandée. Comme la calculatrice est supposée contenir un programme d'évaluation de la méhtode de Simpson (on le reprogramme rapidement si nécessaire), on trouve aisément $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 5,164\,10^{-6}$ à $4\,10^{-10}$ près et $\int_\pi^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = -0,283\,10^{-6}$ à $4\,10^{-10}$ près, d'où $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 4,881\,10^{-6}$ à 10^{-9} près. En appliquant le (c) de la question préliminaire, on obtient : $4,880\,10^{-6} \leqslant S_7(5) \leqslant 5,165\,10^{-6}$ soit

$$\boxed{S_7(5) = 5\,10^{-6} \text{ à } 2\,10^{-7} \text{ près.}}$$

Partie II

1°) La définition de f a été vue ci-dessus pour $x>0$ (c'est $S_1(x)$). Pour $x=0$, l'intégrale est propre en 0, donc existe (on peut écrire $f(0)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-f(\pi)$ pour le confirmer).

2°) a) On a : $f(x)=\int_x^\infty \frac{\sin(u-x)}{u}\,du=\cos x\int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du=\cos xS(x)-\sin xC(x)$.

b) Les fonctions S et C sont des intégrales fonctions de leur borne inférieure, donc elles sont dérivables, de dérivées $-\frac{\sin x}{x}$ et $-\frac{\cos x}{x}$, ce qui les rend indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Par combinaison, f l'est aussi. Nous calculons alors $f'(x)=-\sin xS(x)-\cos xC(x)$ (les autres termes s'éliminent), et $f''(x)$ de même. On en tire l'équation différentielle

$$\boxed{f''(x)+f(x)=\frac{1}{x}\,.}$$

3°) On peut reconstruire $f'(x)$ sous forme d'une seule intégrale :

$$f'(x)=-\int_0^\infty \frac{\sin x\sin t+\cos x\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_x^\infty \frac{\cos(x-t)}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^\infty \frac{\cos u}{u+x}\,du=-S_2(x)$$

en intégrant par parties. Or, on sait que S_2 est positive (I2°b) ; donc f décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

4°) On a vu au I2°c que $f(x)=S_1(x)\leqslant\frac{1}{x}$; l'équation différentielle montre alors que f'' est positive ; en somme,

$$\boxed{f \text{ est décroissante et convexe.}}$$

Partie III

1°) On a vu au I2°c que $S_n(x)\leqslant\frac{1}{x^n}$. Donc $S_n(x)$ est un $o(x^{n-1})$ en $+\infty$.

2°) a) Une récurrence convient. Pour $n=0$ on a $f(x)=S_1(x)$, donc $a_0=1$. De même, $f(x)=\frac{1}{x}-2S_3(x)$, d'où $a_1=-2$. Montrons que $a_n=(-1)^n(2n)!$ convient. Supposons donc que $f(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p(2p)!}{x^{2p+1}}+(-1)^n(2n)!S_{2n+1}$. En reportant la relation $S_{2n+1}=\frac{1}{x^{2n+1}}-(2n+1)(2n+2)S_{2n+3}$, il vient

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p(2p)!}{x^{2p+1}}+\frac{(-1)^n(2n)!}{x^{2n+1}}+(-1)^{n+1}(2n+2)!S_{2n+3}$$

ce qu'il fallait.

b) La série $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p)!}{x^{2p+1}}$ ne converge jamais pour $x>0$, d'après la règle de D'Alembert (elle est issue d'une série entière de rayon de convergence nul).

3°) Le principe est de majorer S_{2n+1} et de calculer les autres termes. Ainsi, pour $x=100$, on a $|a_nS_{2n+1}(100)|\leqslant(2n)!10^{-4n-2}$ et pour $n=2$ ceci vaut déjà $24\,10^{-10}<10^{-8}$ ($n=1$ ne conviendrait pas). Donc $f(100)$ vaut $\frac{1}{100}-\frac{2}{10^6}$ à 10^{-8} près, soit

$$\boxed{f(100)=9,998\,10^{-3} \text{ à } 10^{-8} \text{ près.}}$$

On procède de même pour $f(10)$: $|a_nS_{2n+1}(10)|\leqslant(2n)!10^{-2n-1}$ et pour $n=3$ ceci vaut $720\,10^{-7}<10^{-4}$, d'où l'approximation $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^3}+\frac{24}{10^5}=9,824\,10^{-2}$. Soit $\boxed{f(10)=9,824\,10^{-2} \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$

4°) L'encadrement optimal de $f(5)$ est obtenu en majorant $a_nS_{2n+1}(5)$ par $e_n=\frac{(2n)!}{5^{2n+1}}$ et en choisissant n tel que e_n soit le plus petit possible. Or, $\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{25}$ croît strictement et dépasse 1 dès $n=2$; c'est dire que $e_1>e_2<e_3<e_4<\cdots$. La moindre erreur d'approximation sera donc pour $n=2$ égale à $\frac{24}{5^5}>7\,10^{-3}$.
On peut aussi utiliser l'évaluation de $S_7(5)$ vue plus haut, donc prendre $n=3$. Il vient :

$$f(5)=\frac{1}{5}-\frac{2}{5^3}+\frac{24}{5^5}+720(5\,10^{-6}\pm 2\,10^{-7})=0,19528 \text{ à } 1,5\,10^{-4} \text{ près.}$$

ce qui constitue bien un résultat plus précis.

Partie IV

1°) a) Il nous suffit de développer S' en série entière au voisinage de 0. Or on a bien $S'(x)=-\sum_0^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ d'après le développement du sinus, avec un rayon de convergence infini. Cette série converge uniformément sur tout compact, donc on peut intégrer terme à terme : $S(x)-S(0)=-\sum_0^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ et $b_0=S(0)=\frac{\pi}{2}$.

b) La série ci-dessus est alternée pour $x=1$. L'écart entre sa somme et une somme partielle ne dépasse pas le premier terme négligé. Pour obtenir une approximation à 10^{-6} près de $S(1)$ avec n termes, il faut avoir $\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}<10^{-6}$, ce qui est réalisé avec $n=4$. Soit enfin : $S(1)=\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3.3!}-\frac{1}{5.5!}+\frac{1}{7.7!}=0,624713$ à 10^{-6} près.

2°) a) K est en fait une intégrale propre, car la fonction intégrée se prolonge par continuité en 0.
b)

$$C(x) = L + \int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = L - K + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \ln x$$

et on a un développement en série entière de $\dfrac{1-\cos t}{t} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\dfrac{t^{2n-1}}{(2n)!}$, de rayon infini, qui peut s'intégrer terme à terme pour donner $C(x) = L - K - \ln x + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n)(2n)!}$.

c) Pour $x = 1$ la série est alternée ; on cherche à obtenir $\dfrac{1}{(2n)(2n)!} < 10^{-6}$, et cela se fait avec $n = 5$ (pas avant, hélas). On trouve donc $C(1) = L = L - K + \sum_0^\infty c_n x^n$, avec $K = \dfrac{1}{2.2!} - \dfrac{1}{4.4!} + \dfrac{1}{6.6!} - \dfrac{1}{8.8!}$ à 10^{-6} près, soit $-0,239812$ à 10^{-6} près.

3°) On a $S(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc

$$f(x) - f(0) = \cos x(S(x) - S(0)) - \frac{\pi}{2}(1-\cos x) - \sin x\left(L - K - \ln x + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} c_n x^n\right).$$

Le terme prédominant dans ceci est $\sin x \ln x$ (les autres sont tous des $\mathcal{O}(x)$). On a donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x\ln x + \mathcal{O}(x)$ au voisinage de 0. Il en résulte que la tangente à la courbe représentative de f en 0 est "verticale".

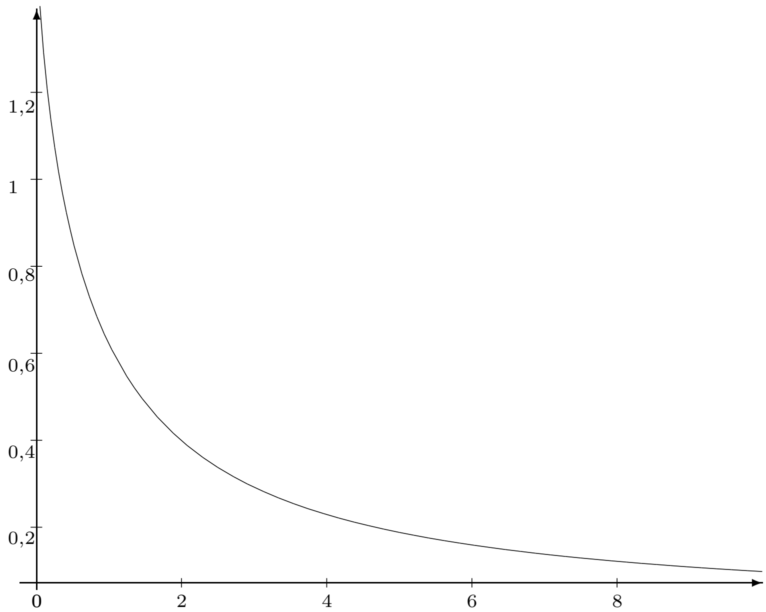
4°) a) On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\sin 1 + \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_1^\infty - 2\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= -\sin 1 + \cos 1 - 2\left[\frac{-\sin t}{t^3}\right]_1^\infty - 6\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= -\sin 1 + \cos 1 + 2\sin 1 + 6\left[\frac{\cos t}{t^4}\right]_1^\infty + 24\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^5}\,\mathrm{d}t \\
&= \sin 1 - 5\cos 1 + 24\left[\frac{\sin t}{t^5}\right]_1^\infty + 120\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^6}\,\mathrm{d}t \\
&= -23\sin 1 - 5\cos 1 - 120\left[\frac{\cos t}{t^6}\right]_1^\infty - 720\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^7}\,\mathrm{d}t \\
&= -23\sin 1 + 115\cos 1 - 720\left[\frac{\sin t}{t^7}\right]_1^\infty - 5040\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t = 697\sin 1 + 115\cos 1 - 5040\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

b) Ignorons le sinus ; il viendra : $\left|\int_{10}^\infty \dfrac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{10}^\infty t^{-8}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{7.10^7} < 10^{-7}$.

c) Par convergence uniforme de la série entière du sinus, on peut échanger série et intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_1^{10} \frac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{10} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n-7}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_1^{10} t^{2n-7}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{10^{2n-6}-1}{2n-6}
\end{aligned}$$



ce qui constitue une série alternée à partir d'un certain rang, que l'on détermine en examinant les premiers termes. A notre avis, il serait bien plus simple d'appliquer la méthode de Simpson entre 1 et 2, puis entre 2 et 10 où la fonction est très petite. On trouve en fin de compte $\int_1^{10} \dfrac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t \approx 0,12876537$ et donc $\int_1^\infty \dfrac{\sin t}{t^8}\,\mathrm{d}t = 0,12876537$ à 10^{-7} près ; on en tire une valeur approchée de L à $5\ 10^{-4}$ près, qui est $697\sin 1 + 115\cos 1 - 5040 \times 0,12876537 = -0,3374$.

5°) On a $f(1) = \cos 1.S(1) - \sin 1.L = 0,6247$ à 10^{-3} près (au pire).