Notations :
On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice unité est notée I, ou I_n s'il s'avère nécesssaire de préciser la dimension.
On notera U_2 l'ensemble $\{-1, 1\}$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $f_{A,\mathbb{K}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice est A dans la base canonique.
On munira $\mathbb{R}^n$ de sa structure usuelle d'espace euclidien, le produit scalaire étant noté dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$

$$\langle V \mid W\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} w_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

et la norme $\|V\| = \sqrt{\langle V \mid V\rangle}$.
Par ailleurs, on notera $T(A)$ la trace de la matrice A.

On appelle **matrice de Hadamard** d'ordre n toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients dans U_2 qui vérifie la relation ${}^tA.A = nI_n$: une telle matrice sera désignée par l'expression "H-matrice" (d'ordre n).
Une H-matrice est dite **normalisée** quand tous les termes de sa première ligne et de sa première colonne sont égaux à 1.
L'ensemble des H-matrices (resp. des H-matrices symétriques) d'ordre n est noté $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{SH}_n$).

1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{H}_n$

1.1

On considère la H-matrice normalisée $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Préciser ses éléments propres.

1.2

Expliciter l'ensemble $\mathcal{H}_2$ (resp. $\mathcal{SH}_2$).

1.3

Quelles sont les valeurs propres d'un élément de $\mathcal{H}_2$? Commencer par le cas de $\mathcal{SH}_2$.

1.4

Pour chaque matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2$, on considère

- l'ensemble S_A des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $ax^2 + (b + c)xy + dy^2 = z^2$;
- dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble C_A des points (x, y) qui vérifient $ax^2 + (b + c)xy + dy^2 = 1$.

Donner la nature de C_A et de S_A pour tous les $A \in \mathcal{H}_2$.

1.5

On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide et on considère $A \in \mathcal{H}_n$.

1.5.1

Montrer que A est inversible, préciser son inverse et son déterminant.

1.5.2

L'inverse de A est-elle encore une matrice de Hadamard ? et sa transposée ?

2 Conditions nécessaires

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$, $\mathcal{H}_n$ non vide et on prend une matrice $A = [a_{j,k}] \in \mathcal{H}_n$.
Pour tout k entier inférieur ou égal à n on note V_k le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de A et on note $\varphi(A) = \sum\limits_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k}$.

Par ailleurs on pose $\widetilde{V} = \sum\limits_{k=1}^{n} V_k$ et $\widetilde{U} = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$.

2.1

Expliciter les deux valeurs possibles de $\langle V_j \mid V_k \rangle$.

2.2 Majoration de $|\varphi(A)|$

2.2.1

Calculer $\|\widetilde{U}\|^2$ et $\|\widetilde{V}\|^2$ en fonction de n. En déduire qu'il existe une constante ξ, non entière, et que l'on explicitera, telle que

$$\|\widetilde{U}\|.\|\widetilde{V}\| = n^{\xi}$$

2.2.2

Calculer le produit scalaire $\langle \widetilde{U} \mid \widetilde{V} \rangle$, et montrer que $|\varphi(A)| \leq n^{\xi}$.

2.2.3

Montrer que si n n'est pas un carré parfait il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{H}_n$ telle que $|\varphi(A)| = n^{\xi}$.

2.2.4 Exemple:

Expliciter une matrice $A \in \mathcal{H}_4$ telle que $T(A) = -4$ et $\varphi(A) = 4^{\xi}$.

2.3 C.N. pour que $\mathcal{H}_n$ soit non vide

2.3.1

Soit D_n l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $U_2 = \{\pm 1\}$.
On part toujours d'une matrice A donnée dans $\mathcal{H}_n$; montrer qu'il existe un couple (Δ_1, Δ_2) de matrices de D_n telle que $B = \Delta_1.A.\Delta_2$ soit normalisée. Le couple (Δ_1, Δ_2) est-il unique ?

2.4

On suppose A normalisée.

2.4.1

En considérant des expressions du genre $\langle V_1 \mid V_k \rangle$, montrer que n est pair; quelle est la valeur de $\varphi(A)$?

2.4.2

On suppose $n \geq 2$ et on définit:

- x le cardinal de l'ensemble des indices j tels que $a_{j,2} > 0$ et $a_{j,3} > 0$
- y le cardinal de l'ensemble des indices j tels que $a_{j,2} > 0$ et $a_{j,3} < 0$
- z le cardinal de l'ensemble des indices j tels que $a_{j,2} < 0$ et $a_{j,3} > 0$
- t le cardinal de l'ensemble des indices j tels que $a_{j,2} < 0$ et $a_{j,3} < 0$

Écrire un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues dont les solutions sont x, y, z, t. En déduire que 4 divise n.

2.5 Valeurs propres d'une H-matrice symétrique

On suppose $\mathcal{SH}_n$ non vide et on en considère un élément A.

2.5.1

Pourquoi A est-elle diagonalisable et où ?
Préciser l'endomorphisme composé $f_{A,\mathbb{R}} \circ f_{A,\mathbb{R}}$.

2.5.2

En déduire que $f_{A,\mathbb{R}}$ possède EXACTEMENT deux valeurs propres distinctes, que l'on précisera.

2.5.3

Soient μ_1, μ_2 les ordres de multiplicité des deux valeurs propres ci-dessus.
Montrer que $|\mu_1 - \mu_2| \leq \sqrt{n}$.

3 Construction d'ume matrice de Hadamard de dimension 12

Dans cette partie on étudie un procédé de fabrication de H-matrices.

On désigne par A, B, C, D quatre matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$; on suppose que ces matrices commutent entre elles et on forme la matrice

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{pmatrix}$$

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $p(e_1) = e_n$ et pour tout $j, 2 \leq j \leq n,\ p(e_j) = e_{j-1}$.

On désigne par P la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et par $\mathcal{A}(P)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les puissances de P, c'est à dire l'ensemble des polynômes en P (avec $P^0 = I_n$).

3.1

Montrer que $\mathcal{A}(P)$ admet pour base la famille $\{P^k, 0 \leq k \leq n-1\}$.

3.2

À quelles conditions portant sur les nombres réels λ_k la matrice $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k P^k$ est-elle symétrique ?

3.3

On suppose que les matrices A, B, C, D appartiennent à $\mathcal{A}(P)$, que leurs coefficients sont dans $U_2 = \{-1, 1\}$, et qu'elles vérifient la condition:

$$(\mathcal{F}) \qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4nI_n$$

3.3.1

Calculer (par blocs) le produit ${}^t\Psi.\Psi$. À quel ensemble la matrice Ψ appartient-elle ?

3.3.2

Dans le cas $n = 3$, expliciter les matrices A, B, C, D qui satisfont en outre à $B = C = D$ et $T(A) = T(B) > 0$. Calculer $T(\Psi)$.

4 Produits tensoriels de matrices de Hadamard

Dans cette partie on étudie un autre procédé de fabrication de H-matrices.

Définition de $A \otimes B$:

Soient $A = (H_{h,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$;

On définit une matrice $A \otimes B$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,1}\beta & a_{1,2}\alpha & a_{1,2}\beta & \dots & a_{1,n}\beta \\ a_{1,1}\gamma & a_{1,1}\delta & a_{1,2}\gamma & a_{1,2}\delta & \dots & a_{1,n}\delta \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n,1}\alpha & a_{n,1}\beta & a_{n,2}\alpha & a_{n,2}\beta & \dots & a_{n,n}\beta \\ a_{n,1}\gamma & a_{n,1}\delta & a_{n,2}\gamma & a_{n,2}\delta & \dots & a_{n,n}\delta \end{pmatrix}$$

4.1

Calculer $T(A \otimes B)$ en fonction de $T(A)$ et $T(B)$.

4.2

On suppose que l'ensemble $\mathcal{H}_n$ est non vide.
Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n$ et $B \in \mathcal{H}_2$ alors $A \otimes B \in \mathcal{H}_{2n}$.

4.3

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ les ensembles $\mathcal{H}_{2^m}, \mathcal{SH}_{2^m}$ et $\mathcal{H}_{3\times 2^{m+2}}$ sont non vides.

4.4

L'ensemble $\mathcal{E}_4$ des matrices de la forme $A \otimes B$ avec $A \in \mathcal{H}_2$ et $B \in \mathcal{H}_2$ est-il égal à $\mathcal{H}_4$?

5 Inégalité de Hadamard

Soit A une matrice réelle inversible. On note encore $V_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} e_j$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormale déduite de $(V) = (V_1, \dots, V_n)$ par le procédé de Schmidt, et B la matrice de passage de (ε) à (V): $B.\varepsilon_k = V_k$ pour tout $k = 1 \dots n$.

5.1

Que dire de $B^{-1}.A$? montrer que $(\det A)^2 = (\det B)^2$.

5.2

En remarquant que B est triangulaire supérieure, montrer l'inégalité de Hadamard:

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^{n} \|V_k\|$$

5.3

Quelle est la norme d'opérateur de l'application multilinéaire

$$(V_1, \dots, V_n) \mapsto \det(V_1, \dots, V_n)?$$

Montrer que quand les coefficients de A sont dans U_2, l'inégalité est une égalité ssi $A \in \mathcal{H}_n$.

5.4 Cas plan

Que signifie géométriquement cette inégalité en dimension 2 ?