CONCOURS D'ENTRÉE DES INGÉNIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1991

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 6

N . B : On signale aux candidats que la notation tiendra compte du soin et de la clarté de la rédaction.
On s'efforcera de traiter les questions dans l'ordre.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel normé, dont la norme est notée $\| \ \|$.
Si u et v sont deux éléments de E, le segment $[u,v]$ est l'ensemble des vecteurs $tu+(l-t)v$, où t est un réel tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$.
C étant une partie de E, C est dite convexe si et seulement si, pour tout couple (u,v) d'éléments de C, le segment $[u,v]$ est contenu dans C.

Partie I :

1°) Soit C une partie convexe de E, n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Montrer que $\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in C^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ est un élément de C.

2°) Dans cette question, n est un entier strictement positif, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un n-uplet d'éléments de E, fixé.

a) Montrer que l'ensemble des vecteurs égaux à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, où les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des réels positifs ou nuls, vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ est une partie convexe de E, qu'on notera C_0.
C_0 est appelée enveloppe convexe de la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
Cette définition sera utilisée dans la suite du problème.

b) Montrer que l'enveloppe convexe de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est la plus petite partie convexe de E contenant $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

3°) Exemples :
E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, composée des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

a) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs $(-1,2)$, $(-1,-1)$, $(-1,3)$, $(1,1)$. On fera une figure et on justifiera la réponse.

b) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs $(1,-2)$, $(-2,-3)$, $(1,1)$, $(-1,0)$. Là encore, on fera une figure et on justifiera avec soin la réponse.

4°) Dans cette question, n est un entier fixé, tel que $n \geqslant 2$, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire sera note $(\ | \ )$. La norme utilisée sur E est la norme euclidienne associée.
Soit a un vecteur fixé de E, c un réel fixé.
Montrer que les ensembles H, F, G dont les définitions suivent, sont convexes.

$$H = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) = c\}$$
$$F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) \geqslant c\}$$
$$G = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) \leqslant c\}$$

5°) Dans cette question, E est un espace vectoriel réel normé quelconque.

a) C étant une partie convexe de E, montrer que l'adhérence $\overline{C}$ de C est convexe.

b) C étant une partie convexe de E, montrer que l'intérieur $\mathring{C}$ de C est convexe.

Partie II :

C étant une partie convexe non vide de E, un élément x de C est appelé point extréma1 de C si et seulement si il n'existe aucun couple (u,v) d'éléments de C et aucun réel $t \in]0,1[$ tels que : $u \neq v$ et $x = tu + (1-t)v$.

1°) Soient u et v deux éléments de E. Quels sont les points extrémaux du segment $[u,v]$?

2°) Dans cette question, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique, et C est l'ensemble des vecteurs (x,y) tels que $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

a) Vérifier que C est convexe.

b) Déterminer les points extrémaux de C.

3 °) E est un espace vectoriel réel normé quelconque, n un entier strictement positif.
Soient $u_0, u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E tels que les vecteurs $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \ldots, u_n - u_0$ soient linéairement indépendants. C est l'enveloppe convexe de $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$. Montrer que les points extrémaux de C sont $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

4 °) Dans cette question, n est un entier, tel que $n \geqslant 2$, et E est l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
C est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})$ tels que :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

a) Montrer que C est une partie convexe de E, stable pour le produit des matrices.

b) Soit A une matrice élément de C, de coefficients $(a_{i,j})$. Montrer que s'il existe un couple d'indices (i, j) tel que $0 < a_{i,j} < 1$, A n'est pas un point extrémal de C.

c) En déduire l'ensemble des points extrémaux de C.

d) Soit A une matrice élément de C, inversible, et dont l'inverse appartient à C. Montrer que A est un point extrémal de C.

e) Réciproquement, montrer que tout élément extrémal de C est une matrice inversible, dont l'inverse appartient à C. En déduire l'ensemble des matrices inversibles de C dont l'inverse est dans C.

Partie III :

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension finie n, tel que $n \geqslant 2$. Le produit scalaire pourra être noté $(\mid)$.
C étant une partie convexe, fermée, non vide de E, u étant un vecteur de E, on définit la distance de u à C, notée $d(u, C)$, par : $d(u, C) = \inf_{x \in C} \|u - x\|$.
On pourra noter d cette distance pour abréger.
Dans les questions 1 ° , 2 ° , 3 ° , u désignera un vecteur fixé. La partie C convexe, fermée, non vide de E est, sauf indication contraire, fixée dans toute cette partie.

1 °) Soient x et y deux éléments de E. Montrer que :

$$\|x - y\|^2 = 2\|x - u\|^2 + 2\|y - u\|^2 - 4\|(x + y)/2 - u\|^2. \qquad (1)$$

2 °) Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de C,

$$\|x - y\|^2 \leqslant 2\|x - u\|^2 + 2\|y - u\|^2 - 4d^2 \text{ où } d = d(u, C).$$

3 °) a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de C telle que :

$$\|x_n - u\| \xrightarrow{n \to +\infty} d = d(u, C).$$

b) Montrer que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

c) Montrer qu'il existe un unique vecteur x de C tel que : $\|x - u\| = d(u, C)$.

On vient d'établir que, si u est un vecteur de E, il existe x unique dans C tel que : $\|x - u\| = d(u, C)$.
On pose $x = proj_C(u)$, et on appelle projection sur C l'application qui à u associe x. Cette définition est valable pour toute la suite.

4 °) Dans cette question, u n'appartient pas à C, et on pose $x = proj_C(u)$.
Soit y un élément de C. En remarquant que :
$\forall t \in [0, 1], \|x - u\| \leqslant \|(1 - t)x + ty - u\|$, montrer que :

$$(y - x | x - u) \geqslant 0. \qquad (2)$$

Réciproquement, montrer que si x est un élément de C, tel que
$\forall y \in C, (y - x | x - u) \geqslant 0$, alors : $x = proj_C(u)$.

5 °) Dans cette question, C est un sous-espace vectoriel de E.

a) Vérifier que C est convexe et fermé.

b) Montrer que la projection sur C définie en III.3 °) est la projection orthogonale sur C.

6 °) C désigne toujours une partie convexe, fermée, non vide de E, et u est un élément de la frontière de C. On appelle (u_n) une suite de vecteurs n'appartenant pas à C, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u - u_n\| < \frac{1}{n}.$$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un vecteur x_n de C, et un vecteur unitaire v_n tels que :
$$\forall y \in C, (y - x_n|v_n) \geqslant 0.$$

b) Montrer que, de la suite (v_n), on peut extraire une sous-suite convergente $(v_{\varphi(n)})$, dont on appellera la limite v.

c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire v de E tel que : $\forall y \in C, (y - u|v) \geqslant 0$.

FIN DE L'ÉNONCÉ