SESSION DE 1992

Options M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

La précision des solutions et la clarté de la mise en page seront des éléments essentiels dans l'appréciation des copies. En particulier aucune démonstration comportant l'application d'un théorème d'interversion de limites ne sera prise en compte en l'absence de son énoncé exact.

PREMIER PROBLÈME

Pour tout réel α et tout réel x on note : $f_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$.

L'objet du problème est l'étude de f_2.

Partie 1

1. *a.* Donner suivant les valeurs de α l'ensemble de définition D_α de f_α.

   b. Pourquoi l'application f_α est-elle indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$?

2. Étude de la continuité et de la dérivabilité à droite en -1 :

   a. Pour quelles valeurs de α, f_α est-elle continue à droite en -1 ?

   b. Pour $\alpha > 1$, étudier la dérivabilité de f_α à droite en -1.

   c. Calculer $f_2'(-1)$ (nombre dérivé à droite de f_2 en -1).

3. Étude de la continuité et de la dérivabilité à gauche en 1 :

   a. Pour quelles valeurs de α, f_α est-elle continue à gauche en 1 ?

   b. Si $1 \notin D_\alpha$, montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f_\alpha(x) = +\infty$.

   c. Pour $\alpha > 2$, étudier la dérivabilité de f_α à gauche en 1.

4. *a.* Étudier le signe de f_α' sur $]-1,1[$ lorsque $\alpha > 1$.

   b. Exprimer $f_1(x)$ et $xf_2'(x)$ à l'aide de fonctions classiques sur $[-1,1[$.

   c. Calculer la limite à gauche en 1 de f_2'.

5. Calcul de $f_2(1)$ et $f_2(-1)$:
   Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in [0, 2\pi[\,, g(x) = x^2.$$

   a. Énoncer le théorème de Dirichlet.

   b. En l'appliquant à la fonction g au point $x = 0$, calculer $f_2(1)$.

   c. En remarquant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)^2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$, calculer $f_2(-1)$.

6. Construire le tableau de variation de f_2 ; puis tracer avec précision la courbe représentative de f_2 (choisir une unité de 5 cm environ).

Partie II

Dans cette partie, a_0 est un réel positif et $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. Lorsqu'elle existe, on note $g(x)$ la somme de cette série. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par S_n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose dans cette question que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

   a. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} S_n x^n$ et la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

   b. En déduire que : $\forall x \in \,]-1, 1[\,, \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

2. On suppose dans cette question que $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cst une suite équivalente à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a. Montrer que $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

   b. Prouver que

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = 1.$$

3. Déduire des questions II.1. et II.2. que lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + (1-x)\ln(1-x) + o\left[(1-x)\ln(1-x)\right].$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Notations : a est un réel strictement positif.

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de fonctions continues sur $[0, a]$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a]\,, \rho_n(x) \geq 0\,;$

ii $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^a \rho_n(x)\,dx = 1\,;$

iii Pour tout $\alpha \in \,]0, a[$, la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, a]$.

1. *Exemple 1.*

   Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) = (n+1)(1-x)^n$$

   vérifie les propriétés i., ii. et iii. avec $a = 1$.

2. *Exemple 2.*

   a. Calculer suivant la parité de $n \in \mathbb{N}$: $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

   b. Étudier le sens de variation de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que W_n est équivalent à W_{n+1} quand n tend vers $+\infty$.

   c. Calculer $W_{2p}W_{2p+1}$ et en déduire un équivalent de W_n sous la forme $An^{-\frac{1}{2}}$ avec $A \in \mathbb{R}_+^*$.

d. On définit la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \psi_n(x) = \frac{1}{W_n} \cos^n x.$$

Montrer qu'elle vérifie les propriétés i., ii. et iii. avec $a = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \displaystyle\int_0^a f(x-t)\rho_n(t)\,dt$.
   a. Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}$, justifier l'uniforme continuité de $(x,t) \mapsto f(x-t)$ sur $K \times [0,a]$.
   b. Prouver que pour tout $\alpha \in]0,a[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f_n(x) - f(x) = \int_0^\alpha [f(x-t) - f(x)]\,\rho_n(t)\,dt + \int_\alpha^a [f(x-t) - f(x)]\,\rho_n(t)\,dt.$$
   c. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser 3.a. et 3.b.].
4. *Applications :*
   a. g est continue sur $[0,1]$ et vérifie $g(1)\neq 0$.
   Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(t)t^n\,dt$.
   b. g est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et vérifie $g(0)\neq 0$.
   Donner un équivalent de $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\cos^n t\,dt$.
5. Soient b et c deux réels tels que $b < c$ et h une application de classe C^1 sur $[b,c]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   a. Si h' ne s'annule pas sur $[b,c]$, expliquez brièvement pourquoi h est un difféomorphisme de classe C^1 de $[b,c]$ sur un intervalle I que l'on précisera suivant le signe de h'. Rappelez alors l'expression de la dérivée de h^{-1}.
   b. On suppose que $h' > 0$ sur $[b,c]$ et que $0 = h(b) < h(c) \leq 1$.
   En effectuant le changement de variables $u = \dfrac{h(t)}{h(c)}$, donner un équivalent de $\displaystyle\int_b^c [h(t)]^n\,dt$ de la forme $\dfrac{B}{n}[h(c)]^n$ avec $B \in \mathbb{R}^+$.
   [On pourra utiliser la question 4.a.]
6. *Applications :*
   a. Donner un équivalent de $x_n = \displaystyle\int_0^t [\,\mathrm{Argsh} x]^n\,dx$.
   b. Calculer la limite de $y_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{\alpha t}\,dt$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque $\alpha \in]0,1[$.