ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
MATHÉMATIQUES 1
OPTION GÉNÉRALE

L'objet du problème est l'étude d'une approximation de $\ln(n!)$ pour les grandes valeurs de l'entier n.

Dans la partie I, on établit des majorations qui seront utilisées dans les parties II et III.
Dans la partie II, on étudie une suite permettant d'obtenir une première approximation de $\ln(n!)$.
Dans la partie III, on établit deux évaluations plus précises de $\ln(n!)$ puis une approximation générale.
Enfin, dans la partie IV, on étudie un algorithme permettant d'expliciter cette approximation générale.
Cette dernière partie utilise uniquement les notations et les résultats de la partie III.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1.
Étant donnés deux entiers i et j tels que $0 \leqslant j \leqslant i$, on note $C_i^j = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ avec la convention usuelle $0! = 1$.

PARTIE I.

1. Vérifier que : $\forall t \neq 1 \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

En déduire : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t}\,\mathrm{d}\,t$

puis que : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

2. On désigne par M un réel positif et on envisage une série réelle $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$ dont le terme général z_k vérifie $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+2}}$.

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$.

Prouver que : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall m \geqslant n+1 \quad \dfrac{1}{(n+1)^{p+2}} + \dfrac{1}{(n+2)^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{k^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{m^{p+2}} \leqslant \displaystyle\int_n^m \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^{p+2}}$.

En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall m \geqslant n+1 \quad \dfrac{1}{(n+1)^{p+2}} + \dfrac{1}{(n+2)^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{k^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{m^{p+2}} \leqslant \dfrac{1}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$

puis que : $\forall n \geqslant 1 \quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \dfrac{M}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$.

PARTIE II : une première approximation de $\ln(n!)$.

1. *Expression de $\ln(n!)$ à l'aide d'une suite.*

a. On considère la suite $(v_k)_{k \geqslant 2}$ définie par $v_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\ \mathrm{d}\,t$.

Prouver que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k + \displaystyle\int_1^n \ln t\ \mathrm{d}\,t$.

Expliciter $\displaystyle\int_1^n \ln t\ \mathrm{d}\,t$.

b. Établir que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \displaystyle\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))\ \mathrm{d}\,u$

En déduire que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \dfrac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u - 1/2}{k-u}\ \mathrm{d}\,u$.

Dans la suite de cette partie on pose $w_k = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u-1/2}{k-u}\ \mathrm{d}\,u$ pour $k \geqslant 2$.

c. Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + 1 - \sum\limits_{k=2}^{n} w_k$.

2. *Étude de la suite* $(w_k)_{k\geqslant 2}$.

Prouver que $w_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}\,\mathrm{d}\,u$ pour $k\geqslant 2$.

En déduire que $0\leqslant w_k\leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} w_k$ converge. On admettra que sa somme a pour valeur $1-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

On note désormais, dans toute la suite du problème, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite définie par* $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

3. *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.

Montrer que : $\forall n\geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n$ *(1)*

4. *Majoration du reste* ε_n.

En utilisant la seconde question de la première partie, établir que : $0\leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)}$ pour $n\geqslant 2$.

PARTIE III : une approximation générale de $\ln(n!)$**.**

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$.

1. *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k$.

À l'aide de l'égalité *(1)* de la partie II, établir que :

$\forall k\geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = -\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) - 1.$

Déduire de la question 1. de la partie I que :

$\forall k\geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{b_i}{k^{i+1}} + \dfrac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ avec $b_i = \dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $|\delta(k)|\leqslant 1$ *(2).*

2. *Une première évaluation de* ε_n.

Dans cette question, on fixe $p=1$ de sorte que *(2)* s'écrit $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2}+\dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{c_1}{k}$, c_1 désignant un nombre réel.

a. Montrer que : $\forall k\geqslant 2 \quad \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{\beta(k)}{k^2}$ avec $0\leqslant \beta(k)\leqslant 2$.

b. Déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1}-r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^3}$ pour $k\geqslant 2$.

Le réel c_1 étant ainsi choisi, établir que :

$\forall n\geqslant 1 \quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\right| \leqslant \dfrac{7}{12n^2}.$

c. Prouver que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k) = r_n$ et en déduire :

$\forall n\geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{\lambda_1(n)}{n^2}$ avec $|\lambda_1(n)| \leqslant \dfrac{7}{12}$.

3. *Une seconde évaluation de* ε_n.

Dans cette question, on fixe $p=2$ de sorte que *(2)* s'écrit $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2}+\dfrac{1}{12k^3}+\dfrac{\delta(k)}{k^4}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{1}{12k} - \dfrac{c_2}{k^2}$, c_2 désignant un nombre réel.

a. Montrer que :

$\forall k\geqslant 2 \quad \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{\beta_1(k)}{k^3}$ avec $0\leqslant \beta_1(k)\leqslant 2$.

À l'aide de la question **2.a.**, prouver que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{\beta_2(k)}{k^2} \text{ avec } 0 \leqslant \beta_2(k) \leqslant 8.$$

b. Vérifier que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad r_{k-1} - r_k = \frac{-2c_2}{k^3} + \left(\delta(k) - \frac{1}{12}\beta_1(k) - c_2\beta_2(k)\right)\frac{1}{k^4}.$$

Déterminer c_2 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \frac{7}{6k^4}$ pour $k \geqslant 2$.

c. Prouver que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_2(n)}{n^3} \text{ avec } |\lambda_2(n)| \leqslant \frac{7}{18}.$$

Désormais, dans toute la suite du problème, p désigne un entier fixé non nul.

4. *Étude d'un système auxiliaire.*

Les réels $b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant définis dans la première question de cette partie, on envisage le système S de p équations linéaires aux p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

et A la matrice carrée d'ordre p dont l'élément $a_{i,j}$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est $a_{i,j} = C_i^{j-1}$ pour $j \leqslant i$ et $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.

Que valent les éléments diagonaux de A ?

Montrer que S admet une solution et une seule que l'on notera $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$.

5. *Évaluation asymptotique de ε_n.*

On pose dans cette question $r_k = \varepsilon_k - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q}$ pour $k \geqslant 1$, $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ étant la solution du système précédent.

a. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à un ordre convenable à la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^q}$, q désignant un entier compris entre 1 et p , montrer que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^q} = 1 + C_q^1\frac{1}{k} + C_{q+1}^2\frac{1}{k^2} + \ldots + C_p^{p-q+1}\frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{q(q+1)\ldots(p+1)}{(p-q+1)!}\int_0^{1/k} \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,\mathrm{d}t.$$

Prouver que : $0 \leqslant \int_0^{1/k} \frac{(1/k-t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2} \int_0^{1/k} u^{p-q+1}\,\mathrm{d}u$.

En déduire que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^q} = 1 + C_q^1\frac{1}{k} + C_{q+1}^2\frac{1}{k^2} + \ldots + C_p^{p-q+1}\frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{\beta_q(k)}{k^{p-q+2}} \text{ avec } 0 \leqslant \beta_q(k) \leqslant C_{p+1}^{q-1}2^{p+2}.$$

b. En remarquant que $\sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^q} - 1\right)$, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{k^{i+1}} + \left(\sum_{q=1}^{p} c_q\beta_q(k)\right)\frac{1}{k^{p+2}} \text{ avec } \mu_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}c_j.$$

c. On pose $m_p = \max(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_p|)$ et $M_p = 1 + 2^{2p+3}m_p$.

Prouver que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad |r_{k-1} - r_k| \leqslant \frac{M_p}{k^{p+2}}.$$

d. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}} \text{ avec } |\lambda_p(n)| \leqslant \frac{M_p}{p+1}.$$

PARTIE IV : Étude d'un algorithme.

On se propose d'étudier dans cette partie un algorithme de calcul des coefficients c_1, c_2, ..., c_p intervenant dans l'approximation de $\ln(n!)$.

On rappelle que ces coefficients constituent la solution du système S défini dans la question **4** de la partie III.

On appelle coût d'un algorithme le nombre total d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions effectuées au cours de la mise en œuvre de l'algorithme.

L'entier p étant déclaré en constante, on effectue les déclarations suivantes :

```
type vecteur : array[1..p] of real ;
       matrice : array[1..p, 1..p] of real;
var B, C : vecteur;
     A : matrice;
```

1. Écrire `Procedure SecondMembre(var B : vecteur)` dont le rôle consiste à calculer le second membre B du système S.

   Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

2. On envisage la procédure suivante :

```
procedure Coefficients(var A : matrice);
var i,j : integer;
begin
  A[1, 1] := 1;
  for j:=2 to p do A[1, j]:=0;
  for i:=2 to p do begin
     A[i, 1] :=1 ;
     for j:=2 to i-1 do A[i,j]  := A[i-1, j-1] + A[i-1,j] ;
    A[i,i] :=i;
    for j:=i+1 to p do A[i, j] := 0;
  end ;
end ;
```

   Expliquer le rôle de cette procédure

   Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

3. Écrire `procedure Approximation(A :matrice ; B :vecteur ; var C :vecteur)` de sorte que, après les appels de `SecondMembre(B)` et de `Coefficients(A)`, l'appel de `Approximation(A, B, C)` produise `C` tel que C[i] = $\mathrm{c_i}$ pour i de 1 à p.

   Déterminer un équivalent de son coût lorsque p tend vers $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent, lorsque p tend vers $+\infty$, du coût total de détermination des coefficients c_1, c_2, ..., c_p.