Concours commun 1996 des Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Epreuve de Mathématiques, Sup MPSI, PCSI, PTSI et Spés, Mardi 21 Mai 1996 .

Problème 1

1. On a: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$B = A^2 = \begin{pmatrix} -8/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & -5/9 & -4/9 \\ 2/9 & -4/9 & -5/9 \end{pmatrix}$

$C = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} = -A$

$U = A^4 = -B = \begin{pmatrix} 8/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 5/9 & 4/9 \\ -2/9 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

2. On en déduit que $A^5 = A$ mais $\{U, A, B, C\}$ n'est pas le sous-groupe de $GL_n(R)$ engendré par A: A n'est même pas inversible. Toutefois, on a la table de multiplication:

$\times$	U	A	B	C
U	U	A	B	C
A	A	B	C	U
B	B	C	U	A
C	C	U	A	B

donc $\{U, A, B, C\}$ a une structure de groupe multiplicatif commutatif, l'élément neutre étant U.

3. On a vu que: $UU = U$ donc u est un projecteur.

Le vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est un élément de $\ker u$ si et seulement s'il vérifie le système:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8x + 2y - 2z & = & 0 \\ 2x + 5y - 4z & = & 0 \\ -2x + 4y + 5z & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8x + 2y - 2z & = & 0 \\ 2x + 5y - 4z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit: $2x = -y = z$.

$\ker u$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$.

Comme le noyau de u est de dimension 1, son image est de dimension 2, et on peut choisir comme base de $Im\, u$ $\left(\vec{a_1} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{a_2} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}\right)$

Le produit scalaire de $\vec{e_1}$ par $\vec{a_1}$ ou $\vec{a_2}$ est nul, donc $Im\, u$ est un plan orthogonal à $\ker u$.

Ainsi, u est la projection sur $Im\, u$ parallèlement à $\ker u$, ie. la projection orthogonale sur $Im\, u$.

On a effectivement: $\left\{ \begin{array}{l} u(\vec{a_1}) = \vec{a_1} \\ u(\vec{a_2}) = \vec{a_2} \end{array} \right.$

Choisissons $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{j} + \vec{k}\right)$ et $\vec{e_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$. La matrice de u dans cette base est:

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On trouve:

$$a(\vec{e_1}) = b(\vec{e_1}) = c(\vec{e_1}) = 0, a(\vec{e_2}) = \vec{e_3}, a(\vec{e_3}) = -\vec{e_2}, b(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}, b(\vec{e_3}) = -\vec{e_3}, c(\vec{e_2}) = -\vec{e_3}, c(\vec{e_3}) = \vec{e_2}$$

. Les matrices de a, b, c dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ sont:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons toujours u le projecteur orthogonal sur le plan $P = Vect(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ et r la rotation d'axe $Vect(\vec{e_1})$ d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors:

$$a = r\, o\, u, b = r^2\, o\, u, c = r^3\, o\, u.$$

5. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ des réels tels que:

$$\sum_{i=0}^{2} \lambda_i \varphi_i = 0.$$

Alors, en prenant successivement $x = 0, \pi$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont nuls: la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est libre.

On a: $\begin{cases} d(\varphi_0) = 0 \\ d(\varphi_1) = \varphi_2 \\ d(\varphi_2) = -\varphi_1 \end{cases}$

donc, comme la dérivation est linéaire, d est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}_1$. La matrice de d dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est:

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A'.$

Problème 2

1. On a:

$$u_1 = 1 = u_1'', u_2 = \frac{1}{2} = u_1', u_3 = \frac{5}{6} = u_2'', u_4 = \frac{7}{12} = u_2', u_5 = \frac{47}{60} = u_3'', u_6 = \frac{37}{60} = u_3'.$$

Pour tout entier naturel n non nul:

$$u_{n+1}' - u_n' = u_{2n+2} - u_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

donc la suite (u'_n) est croissante.

$$u''_{n+1} - u''_n = u_{2n+1} - u_{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n(2n+1)}$$

donc la suite (u''_n) est décroissante.

$$u''_n - u'_n = u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{2n}$$

donc la suite $(u''_n - u'_n)$ tend vers 0, et donc les suites (u'_n) et (u''_n) sont adjacentes.

Les suites réelles (u'_n) et (u''_n) convergent donc vers une même limite l, et la suite (u_n) converge aussi vers l.

2. Comme ci-dessus, les suites (v_{2n}) et (v_{2n-1}) sont adjacentes donc la suite (v_n) est convergente.

3. On a:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Il est clair que:

$$I_{p+2} + I_p = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

donc

$$I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}, I_3 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

4. Remarquons que: $u_1 + 2(-1)^1 I_3 = \ln 2$.

Pour q supérieur ou égal à 1:

$$u_{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2q+3} = u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} + \frac{(-1)^q}{q} + 2(-1)^{q+1}(I_{2q+3} + I_{2q+1})$$

$$u_{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2q+3} = u_q + 2(-1)^q I_{2q+1}$$

De même: $v_1 + (-1)^1 I_2 = \frac{\pi}{4}$

Pour q supérieur ou égal à 1:

$$v_{q+1} + (-1)^{q+1} I_{2q+2} = v_q + (-1)^q I_{2q} + \frac{(-1)^q}{2q+1} + (-1)^{q+1}(I_{2q+2} + I_{2q}) = v_q + (-1)^q I_{2q}$$

5. Pour tout entier naturel p:

$$0 \leq I_p \leq \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

donc la suite (I_p) converge vers 0.

Ainsi la suite (u_n) converge vers $\ln 2$ et la suite (v_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

6. On a:

$$pI_p = \int_0^1 (px^{p-1}) \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left[x^p \frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x^p \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$$

et $\int_0^1 x^p \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, donc (pI_p) tend vers $\frac{1}{2}$.

7. On a:

$$J_{1,q} = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^q}dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ \ si \ \ q=0 \\ \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \ \ si \ \ q=1 \\ \left[\frac{1}{2(1-q)}(1+x^2)^{-q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2(q-1)}(1-2^{-q+1}) \ \ si \ \ q \geq 2 \end{cases}$$

De même:

$$J_{0,q} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^q}dx = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ q=0 \\ [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} \ \ si \ \ q=1 \end{cases}$$

Pour $q=2$:

$$J_{0,1} = \int_0^1 \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx = J_{0,2} + \int_0^1 x\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$J_{0,2} = \frac{\pi}{4} + \left[x\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)}$$

soit $J_{0,2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Pour $q=3$: $J_{0,3} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$.

Pour $p \geq 2$ et $q \geq 1$, on a:

$$J_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p-2} - x^{p-2}}{(1+x^2)^q}dx = J_{p-2,q-1} - J_{p-2,q}$$

ce qui donne:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$q=0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$q=1$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\ln 2$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$
$q=2$	$\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$
$q=3$	$\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{1}{16}$