Centrale/Supélec Mathématiques 1 Concours 96

Corrigé

Partie I - Question préliminaire

La formule (2) est vraie pour $n = 1$ et, si elle est vraie au rang n, l'application de la formule (1) en $x+na$ donne la formule au rang $n+1$. De même, la formule (1) appliquée en $x - a$ donne la formule (3) au rang 1 et on obtient le passage du rang n au rang $n + 1$ en l'appliquant en $x - (n + 1)a$.

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) $\mathcal{L}$ est non-vide (contient, par exemple, les fonctions constantes), stable par combinaison linéaire (en prenant par exemple $K_{\lambda\varphi} = \lambda K_\varphi$ et $K_{\varphi_1+\varphi_2} = K_{\varphi_1} + K_{\varphi_2}$). C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

II.2) Soit f une fonction dérivable de $\mathcal{F}$. Si f' est bornée, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K_f|x - y|$$

où K_f est un majorant de $\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$. Donc $f \in \mathcal{L}$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}$,

$$\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y,\ \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant K_f$$

et, par passage à la limite dans l'inégalité, $|f'(x)| \leqslant K_f$. Donc f' est bornée.

II.3) Soit f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$ et M et N des majorants respectifs de $|f|$ et de $|g|$.

$$\begin{aligned}\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\ &\leqslant M|g(x) - g(y)| + N|f(x) - f(y)|\\ &\leqslant (MK_g + NK_g)|x - y|,\end{aligned}$$

donc fg appartient à $\mathcal{L}$. Si l'une des deux n'est pas bornée, la propriété n'est pas vraie, comme le montre l'exemple $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto \sin x$. La fonction fg est dérivable, à dérivée non bornée.

II.4) Soit $f \in \mathcal{L}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + K_f|x|$.

II.5) Soit $f \in \mathcal{F}$ et M un réel positif tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leqslant x-y \leqslant 1$, on a $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$. Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$, par exemple $x \geqslant y$, et $n = \mathrm{E}[x-y]$. Alors $f(x)-f(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}[f(x-k)-f(x-k-1)]+f(x-n)-f(y)$. Donc $|f(x) - f(y)| \leqslant M(n + x - n - y)$, et $|f(x) - f(y)| \leqslant M(x - y)$. Donc $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A.1.a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f(x+na)| \leqslant A|x+na|+B \leqslant A|x|+B+An|a|$. Comme les séries de termes généraux λ^n et $n\lambda^n$ sont absolument convergentes ($|\lambda| < 1$), il en est de même pour la série de terme général $f(x + na)$.

III.A.1.b) Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$.

$$F(x) - \lambda F(x + a) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n\geqslant 0} \lambda^{n+1} f[x + (n + 1)a] = f(x)$$

Donc F vérifie (1).

Soit $(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$|F(x)-F(y)|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n[f(x+na)-f(y+na)]\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^nK_f|x-y|\ .$$

Donc $|F(x)-F(y)|\leqslant\dfrac{K_f}{1-|\lambda|}\ |x-y|$. Donc $F\in\mathcal{L}$.

Soit G une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1), $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}$, $(G-F)(x)=\lambda(G-F)(x+a)=\lambda^n(G-F)(x+na)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $|(G-F)(x)|\leqslant|\lambda|^n\,(A|x+na|+B)$. Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle, donc $G-F$ est nulle. F est l'unique fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

III.A.2.a) $f_1(x)=1$. $F_1(x)=\dfrac{1}{1-\lambda}$ ·

III.A.2.b et c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n\exp\left(i(x+na)\right)=\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1-\lambda\mathrm{e}^{ia}}=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\lambda\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ ·

$f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\sin x$. f_2 et f_3 sont à dérivée bornée, donc dans $\mathcal{L}$. F_2 et F_3 sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée.

$$F_2(x)=\frac{\cos x-\lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\quad,\quad F_3(x)=\frac{\sin x-\lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ \cdot$$

III.B.1.a et b) En remplaçant λ par $1/\lambda$ et a par $-a$ et $f(x)$ par $(-1/\lambda)\times f(x-a)$ dans II.A.1.a et b), on obtient le résultat pour $|\lambda|>1$.

III.B.2.a) $F_1(x)=-\dfrac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}}=\dfrac{1}{1-\lambda}$ ·

III.B.2.b et c) $\displaystyle -\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{-n}\exp\left(i(x-na)\right)=-\frac{\lambda^{-1}\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-ia}}=-\frac{\lambda\mathrm{e}^{i(x-a)}-\mathrm{e}^{ix}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ ·

F_2 et F_3 ont la même expression qu'en III.A.1.b et c).

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda|=1$

IV.A.1) Soit $F\in\mathcal{L}$ telle que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)-F(x+a)=f(x)$, d'où $|f(x)|\leqslant K_F|a|$. f est donc bornée.

IV.A.2.a) Si $f=0$, les fonctions lipschitziennes de période a conviennent, par exemple $x\longmapsto\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ ·

IV.A.2.b) Donc, si $F\in\mathcal{L}$ vérifie (1), la fonction $x\longmapsto F(x)+\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.A.3.a) En faisant tendre λ vers 1 dans (5), on obtient l'expression $F(x)=\dfrac{\cos x-\cos(x-a)}{2(1-\cos a)}$ $(\cos a\neq 1)$. Cette fonction F est lipschitzienne ($\mathcal{L}$ est un espace vectoriel) et vérifie $F(x)-F(x+a)=\cos x$ pour tout x (passage à la limite quand λ tend vers 1 dans (1), vérifiée par F_2.

IV.A.3.b) $a=2\pi$. Soit $F\in\mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après le préliminaire, $F(x)=F(x+2n\pi)+n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi)=F(\pi)+n$ et $F(2n\pi)=F(0)-n$, on obtient, pour tout n, $F((2n+1)\pi)-F(2n\pi)=2n+F(\pi)-F(0)$, ce qui contredit l'hypothèse $F\in\mathcal{L}$. Il n'y a donc aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1). IV.B.1.a) La fonction $x\longmapsto\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)+F(x+a)=f(x)$.

IV.B.1.b) Si $F \in \mathcal{L}$ vérifie (1), la fonction $x \longmapsto F(x) + \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.2.a) En faisant tendre λ vers -1 dans (5), on obtient l'expression $F(x) = \dfrac{\cos x + \cos(x-a)}{2(1+\cos a)}$ $(\cos a \neq -1)$. Cette fonction F est lipschitzienne ($\mathcal{L}$ est un espace vectoriel) et vérifie $F(x) + F(x+a) = \cos x$ pour tout x (passage à la limite quand λ tend vers -1 dans (1), vérifiée par F_2.

IV.B.2.b) $a = \pi$. Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après le préliminaire, $F(x) = (-1)^n F(x+n\pi) + n\cos x$. Donc $F((2n+1)\pi) = F(\pi) + 2n$ et $F(2n\pi) = F(0) - 2n$, on obtient, pout tout n, $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = 4n + F(\pi) - F(0)$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}$. Il n'y a donc aucune fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3.a) La série de terme général $(-1)^n f(x+n)$ est une série alternée (f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), vérifiant le théorème des séries alternées (f décroissante de limite nulle en $+\infty$), donc elle est convergente.

IV.B.3.b) Soit F sa somme.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[f(x+n) + f(x+n+1)\right] = f(x),$$

donc F vérifie (1).

Pour tout entier p, $\left|\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)\right| \leqslant f(x+p)$, d'après le théorème des séries alternées, donc $|F(x)| \leqslant f(x)$. Or f a une limite nulle en $+\infty$, donc F aussi.

Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $0 \leqslant x - y \leqslant 1$,

$$F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[f(x+n) - f(y+n)\right],$$

$$(x-y)f'(x+n-1) \leqslant f(x+n) - f(y+n) \leqslant (x-y)f'(x+n) \leqslant 0$$

(d'après le théorème des accroissements finis et la croissance de f'). Donc $F(x) - F(y)$ est la somme d'une série alternée vérifiant le théorème des séries alternées. Il en résulte que $|F(x) - F(y)| \leqslant (x-y)|f'(0)|$, après majoration de la valeur absolue de la somme de la série alternée par celle de son premier terme. Donc, d'après II.5), $F \in \mathcal{L}$.

Soit $G \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$. La fonction $H = G - F$ est une fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H(x+n) = (-1)^n H(x)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H(x+n) = 0$. Donc H est la fonction nulle, et F est unique.