CENTRALE 1996 TA

Pour tout entier $k \geqslant 2$ tout réel x, on pose :

$$f_k(x) = x^k + x + 1$$

et on se propose d'étudier certaines propriétés des fonctions ainsi définies. On note C_k la courbe représentant f_k dans un repère orthonormal.

Partie I *Étude de f_2 et de f_3*

I.1. Étudier f_2. On remarquera de C_2 est une parabole dont on précisera l'axe et le sommet.

I.2. Étudier f_3.

I.3. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_3(x) - f_2(x)$? En déduire les points d'intersection de C_2 et C_3 (dont on précisera les coordonnées) et la position relative des deux courbes.

I.4. Tracer, sur une même figure, C_2 et C_3.

Partie II *Étude de f_k lorsque k est pair ($k = 2n$, $n \geqslant 1$)*

II.1. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)$? En déduire que C_{2n+2} et C_{2n} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées).
Quelle est la position relative des deux courbes ?

II.2. Étudier la fonction f_{2n} . Montrer qu'elle admet un minimum m_n, atteint pour la valeur α_n de x , où

$$\alpha_n = -\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad m_n = \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} + 1$$

II.3. Montrer que $-1 < \alpha_n < 0$ et $m_n > 0$.

II.4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$.

II.5. On se propose d'étudier la monotonie de la suite (α_n) .
À cet effet on définit sur l'intervalle $[2, +\infty[$ la fonction auxiliaire φ par :

$$\varphi(u) = -\left(\frac{1}{u}\right)^{\dfrac{1}{u-1}} = -\exp\left(-\frac{\ln(u)}{u-1}\right)$$

a) Montrer que $\varphi'(u)$ peut se mettre sous la forme $\varphi(u)\psi(u)/(u-1)^2$ où ψ est une fonction que l'on explicitera.

b) Déterminer le signe de $\psi'(u)$, puis celui de $\varphi'(u)$ et conclure quant à la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$.

II.6. Tracer, sur une même figure, C_{2n} et C_{2n+2}. On précisera notamment la tangente à chacune des deux courbes en son point d'abscisse 0 .

Partie III *Étude de f_k lorsque k est impair ($k = 2n+1$, $n \geqslant 1$)*

III.1. Montrer que C_{2n+1} admet le point de coordonnées $(0, 1)$ comme centre de symétrie.

III.2. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_{2n+3}(x) - f_{2n+1}(x)$? En déduire que de C_{2n+3} et C_{2n+1} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées).
Quelle est la position relative des deux courbes ?

III.3. Étudier la fonction f_{2n+1} . Montrer qu'elle s'annule pour une valeur a_n, et une seule, de x et que a_n vérifie $-1 < a_n < -\frac{1}{2}$.

III.4. Écrire l'équation de la tangente T à C_{2n+1} au point A d'abscisse 0. Étudier la position de C_{2n+1} par rapport à T. Qu'en déduit-on pour le point A ?

III.5. Tracer, sur une même figure, C_{2n+1} et C_{2n+3}.

Partie IV *Étude de la suite $(a_n)_n$ et de suites et séries qui lui sont liées*

IV.1. Montrer que $f_{2n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^{2n+1} - a_{n+1}^{2n+3}$.
En déduire que $f_{2n+1}(a_{n+1}) < 0$ puis que la suite (a_n) est décroissante.

IV.2. Montrer que la suite (a_n) converge vers -1 .

IV.3. Montrer que les suites (a_n^{2n}) et (a_n^n) convergent vers 0 .

IV.4. Étudier $\lim_{n\to+\infty} f_{2n+1}\left(-1+\frac{1}{n}\right)$. En déduire l'existence d'un entier naturel n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $-1 + \dfrac{1}{n} < a_n$.

IV.5. Montrer que les trois séries $\sum(1 + a_n)$, $\sum a_n^{2n}$, et $\sum |a_n|^n$ sont divergentes.

IV.6. Déterminer les rayons de convergence des deux séries entières $\sum a_n^{2n}x^n$, et $\sum a_n^n x^n$.