CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES TA
MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PARTIE I .

I .1.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -36 & -16 \\ 0 & -18 & -24 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

I .2. Le changement de variable est ici : $u(t) = -1 + \frac{t}{2}$ donc :

$$U_3\left(u(t)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+t/2 \\ (-1+t/2)^2 \\ (-1+t/2)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1/4 & 0 \\ -1 & 3/2 & -3/4 & 1/8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = P.U_3(t)$$

$$\text{donc : } \quad G = E.P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PARTIE II .

II .1.pour vérifier que $\mathcal{B}$ est un système générateur, il suffit de montrer que les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont combinaisons de vecteurs de $\mathcal{B}$. Or :

$$(1 \le k \le n) \ ; \ X^k = X^k . \left[X + (1-X)\right]^{n-k}$$

$$\text{donc :} \quad X^k = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{\mathrm{C}_n^i} \, \mathrm{C}_{n-k}^{i-k} \, B_{i,n}$$

Il s'agit donc d'une autre base de $\mathbf{R}_n[X]$.

II .2. Le calcul précédent donne la matrice de passage Q_3 de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. La matrice réciproque est donnée en développant les $B_{i,n}$. Donc pour $n = 3$:

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

II .3. En reconnaissant le résultat de (I,2), et en remarquant que $U_3(t) = {}^tQ_3.B(t)$, on a $D = G.{}^tQ_3$.

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

PARTIE III .

III .1.évident car $t \in [0,1]$.

III .2. Calcul de X^0 de (II,1) ou formule du binôme.

III .3. Calcul de X^1 pour $X = t$

III .4.par substitution.

III .5. Faire le calcul.

III .6.Dérivation d'un produit.

PARTIE IV .

IV .1.D est une matrice à 2 lignes et n+1 colonnes. La i-ème colonne est formée des composantes de P_i soit $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$.

IV .2.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

IV .3. $t' = 1 - t$ et $t' \in [0,1]$. Compte tenu de (III,4), il faut prendre les pôles dans l'ordre décroissant ou poser : $Q_i = P_{n-i}$, avec la même transformation sur la matrice D.

IV .4. Le calcul donne : $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OP_0}$

Pour dériver on utilise les formules de (III,6).

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = -\,n.\overrightarrow{OP_0}\,.\,B_{0,n-1}(t) + n.\sum_{i=1}^{n-1}\overrightarrow{OP_i}\,.\Big[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\Big] + n.\overrightarrow{OP_n}\,.\,B_{n-1,n-1}(t)$$

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = -\,n.\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\,.\,B_{i,n-1}(t)$$

Pour $t = 0$ il reste : $\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}(0)}{dt} = -\,n.\overrightarrow{OP_0} + n.\overrightarrow{OP_1} = n.\overrightarrow{P_0P_1}$

De même $\dfrac{d^2\,\overrightarrow{OM}(0)}{dt^2} = n.(n-1).\big[-\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\big] = n.(n-1).\big[\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}\big]$

$$\overrightarrow{OM}(1) = \overrightarrow{OP_n} \qquad \frac{d\,\overrightarrow{OM}(1)}{dt} = n.\overrightarrow{P_{n-1}P_n} \qquad \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}(1)}{dt^2} = n.(n-1).\big[\overrightarrow{P_{n-1}P_{n-2}} + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}\big]$$

IV .5. Avec (III,1) et (III,2), Pour chaque t ($t \in [0,1]$), M est barycentre des points P_i affectés de coefficients de même signe. M est donc dans le polygône dont le bord extérieur est formé de segments $[P_iP_j]$

IV .6.

$$\overrightarrow{OQ_i} = A\,.\,\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{V}$$

IV .7. Voir figure

PARTIE V .

V .1. Pour $j = 0$ la formule n'est autre que la définition.

Supposons la formule vraie pour j ($0 \le j \le n-1$) et utilisons les formules de (III,5).

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n-j} P_i^{(j)}.\,B_{i,n-j}(t)$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=1}^{i=n-j-1} P_i^{(j)}.\big[(1-t).\,B_{i,n-j-1}(t) + t.\,B_{i-1,n-j-1}\big] + P_0^{(j)}(1-t).\,B_{0,n-j-1} + P_{n-j}^{(j)}.t.\,B_{n-j-1,n-j-1}$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n-j-1}\big[(1-t).\,P_i^{(j)} + t.\,P_{i+1}^{(j)}\big].\,B_{i,n-j-1}(t)$$

D'où le résultat : $\overrightarrow{OM}(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-(j+1)} P_i^{(j+1)}.\,B_{i,n-(j+1)}(t)$

Pour $j = n$ on a : $\overrightarrow{OM}(t) = P_0^{(n)}.\,B_{0,0}(t) = P_0^{(n)}$

V .2. En annexe.

PARTIE VI .

VI .1. On a déjà écrit : $\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = -\,n.\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\,.\,B_{i,n-1}(t)$ donc :

Pour $0 \le i \le n-1$ $\overrightarrow{OQ_i} = \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$

VI .2. En annexe.

PARTIE VII .

VII .1. De (IV,4), les points limites et leurs tangentes ainsi que la symétrie imposent :

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ d'après (IV,5).

VII .2. On a :

$$M(1/4) = \begin{pmatrix} x_1 = -11/16 \\ y_1 = (30\alpha + 27\beta/2)/64 \end{pmatrix} \quad M(1/2) = \begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ y_2 = \alpha/2 + 3\beta/8 \end{pmatrix} \quad M(3/4) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

soit le système :

$$\begin{cases} \alpha/2 + 3\beta/8 = 1 \\ (30\alpha + 27\beta/2)^2 + 44^2 = 64^2 \end{cases}$$

$$soit\alpha = 0,872983 \qquad \beta = 1,502689$$

VII .3. En annexe.

ANNEXE

```
PROGRAM CONCOURS ;
USES printer ;
TYPE
 POINT = ARRAY[1..2] of REAL ;
 POLES = ARRAY[0..10,1..2] of REAL ;
 N_DEGRE = Integer ;
VAR
 COURBE , DERIV1 , DERIV2 : POLES ;
 N0 , N1 , N2 : N_DEGRE ;
 T : REAL ;
***********************************************
 FUNCTION XPij(i,j : Integer ; P : POLES ; t : REAL) : REAL ;
  BEGIN
   IF j=0
    THEN XPij := P[i,1]
   ELSE XPij := t*XPij(i+1,j-1,P,t) + (1-t)*XPij(i,j-1,P,t) ;
  END ;
 FUNCTION YPij(i,j : Integer ; P : POLES ; t : REAL) : REAL ;
  BEGIN
    IF j=0
    THEN YPij := P[i,2]
    ELSE YPij := t*YPij(i+1,j-1,P,t) + (1-t)*YPij(i,j-1,P,t) ;
  END ;
PROCEDURE CALCUL(N : N_DEGRE ; P : POLES ; T : REAL ; VAR M : POINT) ;
 BEGIN
  M[1] := XPij(0,N,P,T) ;
  M[2] := YPij(0,N,P,T) ;
 END ;
***********************************************
PROCEDURE DERIVE(N : N_DEGRE ; P : POLES ; VAR ND : N_DEGRE ; VAR PD : POLES) ;
 VAR
  k,l : Integer ;
 BEGIN
  ND := N - 1 ;
  FOR k := 0 TO ND DO
   FOR l :=1 TO 2 DO
    PD[k,l] := N*(P[k+1,l]-P[k,l]) ;
 END ;
***********************************************
PROGRAMME PRINCIPAL
VAR k : integer ;
 Mt , Vt , Gt : POINT ;
BEGIN
 N0 := 4 ;
 COURBE[0,1] := 1 ;COURBE[1,1] := 1 ;COURBE[2,1] := 0 ;COURBE[3,1] := -1 ;
      COURBE[4,1] := -1 ;
 COURBE[0,2] := 0 ; COURBE[1,2] := 0.873 ;COURBE[2,2] := 1.503 ;
      COURBE[3,2] := 0.873 ;COURBE[4,2] := 0 ;
```

```
FOR k := 0 TO 8 DO
 BEGIN
  CALCUL(N0 , COURBE , k/8 , Mt) ;
  DERIVE(N0 , COURBE , N1 , DERIV1) ;
  DERIVE(N1 , DERIV1 , N2 , DERIV2) ;
  CALCUL(N1 , DERIV1 , k/8 , Vt) ;
  CALCUL(N2 , DERIV2 , k/8 , Gt) ;
  WRITELN(lst,k,'x= ',Mt[1] :6 :3,' y= ',Mt[2] :6 :3,' x"= ',Vt[1] :7 :3,
  ' y"= ',Vt[2] :7 :3,' x"= ',Gt[1] :7 :3,' y"= ',Gt[2] :7 :3) ;
 END ;
END.
```