nom :

spé M1 carnot DIJON

Le plan du problème et son objet (construire une fonction continue paire 2π périodique dont la série de FOURIER diverge en un point) est bien donné.

Cinq erreurs ou imprécisions d'énoncé : (I-5) faut-il se contenter de donner l'existence de K, ou comme le suggère l'énoncé, le calculer exactement ? Dans (II.2) l'énoncé devrait demander de calculer l'intégrale, non seulement en fonction de $s_n(t)$ ET de t. En (II.4) l'indice muet n est mal choisi, car il peut prter à confusion avec le n fixé de (II.5). En (II 5.b) l'énoncé oublie de préciser que r et s sont entiers, sinon le résultat est faux par exemple pour r=1 et s=1.1) ; Dans le second problème en (4.b) P_n est la partie régulière et non le développement limité lui mme.

PREMIER PROBLÈME

Partie I

(1) **φ est définie :** La fonction sous le signe somme est en effet continue sur $\mathbb{R}*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 : elle st donc localement intégrable et bornée : φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

☐ Quand au fait qu'elle a une limite finie en $+\infty$, cela peut se démontrer de trois manières :

• **On intègre par parties, pour faire apparaître une intégrale absolument convergente :** $\left\{\begin{array}{l} du = \sin t dt \\ v = \frac{1}{t}\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} u = 1-\cos t \text{ choix de la constante pour continuité en 0} \\ dv = \frac{-dt}{t^2}\end{array}\right.$ ce qui donne $\varphi(x) = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$; l'intégrale de droite a une limite en plus l'infini car, d'une part elle est de mme nature que $\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$ et comme $|\frac{1-\cos t}{t^2}dt| \leq \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale (de RIEMANN avec $\alpha = 2 > 1$) converge, par domination l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tt}{t}dt$ converge ?

• **L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge d'après le critère d'ABEL intégral, puisque $t \to \frac{1}{t}$ décroit et tend vers zéro et que $\int_X^Y \sin t dt| = |\cos X - \cos Y| \leq 2$ (est bornée indépendamment de X et Y réels).**

• **Par référence à une série alternée : Comme $\alpha_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt$ est décroissant et tend vers zéro, et que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}|dt$ tend vers zéro, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge.** *(cette méthode fit l'objet de la question (2)).*

---

(2) **$|\alpha_n|$ décroît :** En effet $|\alpha_n| = |\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t}dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{n\pi} = \frac{1}{n} \to 0$ et le changement de variable $t = n\pi + u$ donne $|\alpha_n| = |(-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi+u}du|$ qui décroît bien en fonction de n.

(3.a) **encadrement à faire :** C'est du cours sur les séries alternées : $\alpha_0 + \underbrace{-|\alpha_1| + |\alpha_2|}_{\leq 0} + ...$; les accolades en dessous prouvent l'inégalité de droite ; les accolades en dessus de $\overbrace{|\alpha_0| - |\alpha_2|}^{\geq 0} + ...$ prouvent celle de gauche.

(3.b+3.c) **encadrer $\varphi(\mathbf{x})$:** On a d'après CHASLES $\varphi(x) = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}dt + \int_{2n\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$ comme la dernière intégrale est positive à cause de la parité de 2n, et inférieure à $\alpha_{2n} \geq 0$ on a : $0 \leq \sum_0^{2n} \alpha_k \leq \varphi(x) \leq \sum_0^{2n+1} \alpha_k \leq \alpha_0$, ce qui est l'encadrement demandé.

Quant à l'encadrement de **(3.c)**il résulte de ce que l'imparité de φ permet de se ramener à $\mathbb{R}+$, et que n de la question précédente existe comme partie entière de $\frac{x}{2\pi}$.

---

(4) **ψ est $\mathbf{C}^\infty$:** On peut écrire $\psi(x) = \frac{x-\sin x}{x\sin x}$; 0 est la seule racine du dénominateur dans l'intervalle proposé : pour x non nul on peut écrire : $\psi(x) = \dfrac{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^2 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}} =_{(x\neq 0)} = \dfrac{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}}$ Comme la fonction de droite prend la mme valeur en 0 que ψ elle lui est égale partout, son numérateur est C^∞ comme somme d'une série entière de rayon infini, le dénominateur, aussi, et comme il est $\frac{\sin x}{x}$ prolongé par 1 en 0, il ne s'annule pas et ainsi ψ rapport de deux fonctions de classe infinie dans l'intervalle proposé est aussi de classe infinie.

Existence de K : *L'énoncé est ambigu, car comme il est rédigé, on pourrait croire que l'on demande sa*
(5) *valeur exacte, et non seulement son existence ; or les deux démonstrations ne sont pas de la mme longueur, et cela pénalise les candidats scrupuleux, qui ont compris l'énoncé dans le sens précis de sa rédaction littérale !*

• **Première démonstration : existence seule de K :** $|\psi|$ étant continue sur le compact $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y est bornée, d'après le théorème des BORNES, par un nombre S ; Or le membre de gauche de l'inégalité proposée est inférieur à la valeur absolue de l'intégrale $|\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]\psi(\frac{t}{2})| \leq 1 \times S$ Donc on peut prendre $K = \pi S$.

• **Seconde démonstration : calcul de K :**

Pour se rassurer on peut étudier graphiquement ψ au moyen de Maple, dans l'intervallle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $plot(1/x - 1/sin(x), x = 0..Pi/2, -0.4..0, scaling = UNCONSTRAINED, title =$'ESIM 1996 $f(x) = 1/x - 1/sin(x)$'); qui donne un maximum pour la valeur absolue en $\frac{\pi}{2}$.

On étudie les variations de ψ (impaire), dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ qui est du signe de $N(x) = x^2 - \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = x^2 - \frac{1}{\cos x} + \cos x$; Pour avoir son signe on étudie ses variations $N'(x) = 2x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x$ et $N"(x) = 2 - \frac{\cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos x \sin^2 x}{\cos^4 x} - \cos x$;

Pour avoir le signe de N" on pose $C = \cos x$ et N" est ainsi du signe de $A = 2C^4 - C^3 - 2C(1-C^2) - C^5 = C(2C^3 - C^2 - 2 + 2C^2 - C^4) = C(2C^3 + C^2 - 2 - C^4) = C\left[2(C-1)(C^2+C+1) - C^2(C-1)(C+1)\right] = C(C-1)(2C^2 + 2C + 2 - C^3 - C^2) = C(C-1)(C^2 - C^3 + 2C + 2)$; or une étude rapide de $B(C) = -C^3 + C^2 + 2C + 2$ donne $B'(C) = -3C^2 + 2C + 2$ trinôme du second degré, qui est positif pour C entre 0 et 1, car du signe opposé à son coefficient dominant -3 entre ses deux racines qui sont $\frac{1+\varepsilon\sqrt{7}}{3}$ et on a ainsi les tableaux de variations :

C	$0 \quad 1$
$B'(C)$	$2 + 1$
$B(C)$	$2 \nearrow 4$

donc N" est négatif et

x	$0 \quad \frac{\pi}{2}$
$N'(x)$	$0 \searrow -$
$N(x)$	$0 \searrow -$
$\psi(x)$	$0 \searrow -$

et ainsi $S = |\psi(\frac{\pi}{2})| = 1 - \frac{2}{\pi}$ et $\boxed{\mathbf{K = S\pi = \pi - 2}}$.

Partie II

Calcul de $\mathbf{s'_n(t) + \frac{1}{2}}$: $s'_n(t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \cos t + ... + \cos(nt) = 1 + \cos t + ... + \cos(nt) - \frac{1}{2} = \mathrm{Re}(1 + e^{it} + ... + e^{int}) -$
(1) $\frac{1}{2} =_{e^{it}\neq 1} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1} - \frac{1}{2}\right] =_{\text{(On factorise haut et bas l'exponentielle de la moitié de l'argument)}} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}\right] = \cos(\frac{nt}{2}) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} = \frac{2\cos(\frac{nt}{2})\sin(\frac{(n+1)t}{2}) - \sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}}$; On constate, par équivalent que cette formule se prolonge pour t=0 modulo 2π. $\boxed{\sin(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}})\left[\mathbf{s'_n(t)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sin\left((\mathbf{n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{t})\right)}$

Intégrale à calculer : D'après le calcul précédent $\int_0^t \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du = \int_0^t (2s'_n(u) + 1) du =$
(2)
$t + 2s_n(t) - 2s_n(0)$ soit $\boxed{\int_0^{\mathbf{t}} \frac{\sin\left[\left(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{u}\right]}{\sin\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{2}}\right)} \mathbf{du = 2s_n(t) + t}}$. L'énoncé aurait du préciser "en fonction de $s_n(t)$ et de t ".

Calculer A : D'après **(II.2)** on a : $s_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right) du - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{u}{2}} +\right.$
(3) $\left.\frac{1}{\frac{u}{2}}\right) du - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\left[(n+\frac{1}{2})u\right]\left(\psi(\frac{u}{2}) + \frac{1}{\frac{u}{2}}\right) du - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\left[(n+\frac{1}{2})u\right]\left(\psi(\frac{u}{2}) + \right) du + \varphi\left[(n+\frac{1}{2})t\right] - \frac{t}{2}$. Comme s_n est 2π périodique et impaire, pour la recherche de A, on peut se limiter à $0 \leq t \leq \pi$ et d'après **(I.3.c)** on a $\boxed{|\mathbf{s_n(t)}| \leq \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{2}} + \alpha_{\mathbf{0}} + \frac{\pi}{\mathbf{2}} = \mathbf{A}}$

V est paire : V existe, car la série associée est NORMALEMENT convergente d'après la majoration précédente
(4) car $|\frac{v_n(t)}{n^2}| \leq \frac{A}{n^2}$. Et comme chaque v_n est pair comme produit de fonctions impaires et 2π périodiques, V l'est aussi. Comme les v_n sont continues et que la convergence de la série de V est normale donc uniforme, V est aussi continue.

Inégalités à démontrer : Pour la première on ajoute 2^{m^2+1} aux trois membre de $-2^{m^2} \leq -k \leq -1$ ce qui
(5.a) donne $2^{m^2} = 2^{m^2+1} - 2^{m^2} \leq 2^{m^2+1} - k \leq 2^{m^2+1} - 1$.

Pour la seconde on ajoute 2^{m^2+1} aux trois membre de $1 \leq k \leq 2^{m^2}$ ce qui donne $2^{m^2+1} + 1 \leq 2^{m^2+1} + k \leq 2^{m^2+1} + 2^{m^2} = 3 \times 2^{m^2}$.

Inégalité à démontrer : *(L'énoncé comporte une erreur, il devrait préciser que r et s sont ENTIERS*
(5.b) *!)*

On a $3 < 8 = 2^3$ donc $3 \times 2^{r^2} < 2^{3+r^2} = 2^{r^2+2+1} \leq 2^{r^2+2.r+1} \leq 2^{(r+1)^2} \leq 2^{s^2}$ cqfd.

Calculer $\mathbf{a_p(v_m)}$: La difficulté de cette question le jour du concours, tient à la difficulté d'ordonner une
(5.c)
discussion rapide et précise. Il y faut du temps et une bonne maitrise du calcul.

On linéarise comme indiqué $v_m(t)$: $v_m(t) = s_{2^{m^2}}(t)\sin\left(2^{m^2+1}t\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{m^2}} \frac{1}{k}\sin(kt)\sin\left(2^{m^2+1}t\right) = \sum_{k=1}^{2^{m^2}} \frac{1}{2k}\Big[-\cos\left((2^{m^2+1}+k)t\right) + \cos\left((2^{m^2+1}-k)t\right)\Big]$. $\boxed{\mathbf{v_m(t)} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{2^{m^2}}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2k}}\Big[-\cos\left((\mathbf{2^{m^2+1}+k})\mathbf{t}\right) + \cos\left((\mathbf{2^{m^2+1}-k})\mathbf{t}\right)\Big]}$

■ **Première méthode :**

D'après les questions précédentes, les nombres $2^{m^2+1}-k$ et $2^{m^2+1}+k$ sont distincts lorque k et m varient : $a_p(c_m)$ est le coefficient en $\cos(pt)$ de v_m donc : $\begin{cases} \text{si} m \neq n & \text{alors } a_p(v_m) = 0 \\ \text{si} m = n & \text{alors } a_p(v_m) = \frac{1}{2\left(2^{m^2+1}-p\right)} \end{cases}$

D'o : $\boxed{\mathbf{a_p(v_m)} = \frac{\delta_{(\mathbf{m,n})}}{\mathbf{2(2^{n^2+1}-p)}}}$ *(le $\delta_{(m,n)}$ est le delta de KRONECKER).*

■ **Seconde méthode :**

Puis $v_m(t)\cos(pt) = \sum_{k=1}^{2^{m^2}} \frac{1}{2k}\left[-\cos\left((2^{m^2+1}+k)t\right)\cos(pt) + \cos\left((2^{m^2+1}-k)t\right)\cos(pt)\right] = \sum_{k=1}^{2^{m^2}} \frac{1}{4k}\Big[-\cos\left((2^{m^2+1}+k+p)t\right) - \cos\left((2^{m^2+1}+k-p)t\right) + \cos\left((2^{m^2+1}-k+p)t\right) + \cos\left((2^{m^2+1}-k-p)t\right)$.

Et il ne reste plus qu'à intégrer, en tenant compte de ce que $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(st)dt = 0$ si s n'est pas nul et 2π sinon.

Compte tenu des encadrements de **(5.a)** : $\begin{cases} 2^{m^2} \leq 2^{m^2+1} - k < 2^{m^2+1} \\ 2^{m^2+1} < 2^{m^2+1} + k \leq 3 \times 2^{m^2+1} \end{cases}$ On a :

$$\begin{cases} 2^{m^2} + 2^{n^2} \leq 2^{m^2+1} - k + p < 2^{m^2+1} + 2^{n^2+1} & 2^{m^2+1} - k + p \text{ n'est jamais nul} \\ 2^{m^2} - 2^{n^2+1} < 2^{m^2+1} - k - p < 2^{m^2+1} - 2^{n^2} & 2^{m^2+1} - k - p \text{ ne peut tre que si m=n sinon } < 0 \text{ ou } > 0 \\ 2^{m^2+1} + 2^{n^2} < 2^{m^2+1} + k + p < 3 \times 2^{m^2} + 2^{n^2+1} & 2^{m^2+1} + k + p \text{ n'est jamais nul} \\ 2^{m^2+1} - 2^{n^2+1} < 2^{m^2+1} + k - p < 3 \times 2^{m^2+1} - 2^{n^2} & 2^{m^2+1} + k - p \text{ jamais nul car } > 0 \text{ si } m \geq 0 < 0 \text{ d'après (5.b) sinon} \end{cases}$$

Le seul k donnant un terme non nul dans la somme des intégrales qui interviennent dans le calcul est $k = 2^{n^2+1} - p$.

Par conséquent on trouve aussi : $\boxed{\mathbf{a_p(v_m)} = \frac{\delta_{(\mathbf{m,n})}}{\mathbf{2(2^{n^2+1}-p)}}}$ *(le $\delta_{(m,n)}$ est le delta de KRONECKER).*

Calculer $\mathbf{a_p(V)}$: On a le droit de permuter intégrale et sommation de la série de V, puisqu'il y a convergence
(5.d) UNIFORME de la série V, puisque convergence NORMALE. On a immédiatement d'après le calcul précédent : $\boxed{\mathbf{a_p(V)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n^2(2^{n^2+1}-p)}}}$

Équivalent de somme partielle de la série harmonique : C'est du cours : par le théorème de RIEMANN
(6.a)
de comparaison de série et d'intégrale on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + C + o(1)$. (C=0.57.. étantla contante d'EULER, par Maple on a autant de décimales qu'on le désire).

Conclure pour la convergence de la série de FOURIER en 0 : D'après les résultats précédents :
(6.b) $$\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1} a_p(V) = \frac{1}{2n^2} \sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1} \frac{1}{2^{n^2+1}-p} =_{\text{(en commençant la sommation par la fin)}} \frac{1}{2n^2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^{n^2}}\Big)$$

■ **Conséquence :** On reconnait dans cette parenthèse la somme partielle harmonique $H(2^{n^2}) \sim \ln(2^{n^2}) = n^2 \ln 2$. Par conséquent $\boxed{\displaystyle \mathbf{\sum_{p=2^{n^2}}^{2^{n^2+1}-1} a_p(V) \sim_{n=\infty} \frac{\ln 2}{2}}}$.

■ **Conclure pour la série de FOURIER de V :** La série de FOURIER de V au point t=0, ne satisfait pas à la condition de CAUCHY, donc diverge. Le problème a montré, qu'tre continue et 2π périodique, ne suffisait pas pour que la série de FOURIER d'une fonction converge. Demander aux élèves l'énoncé du théorème de DIRICHLET !

DEUXIÈME PROBLÈME

Nature de l'intégrale proposée : Si $\alpha < 0$, la fonction f sous le signe somme n'est pas définie en +0 : das
(1.a) tous les cas on peut écrire $f(t) = (\frac{1}{t})^{-\alpha} e^{\frac{-1}{t}}$, l'exponentielle étant prépondérante par rapport à toute puissance, la limite de f en +0 est 0 : la fonction f étant localement intégrable et bornée sur $]0, x]$, **l'intégrale proposée converge**.

Nature de le la seconde intégrale : Cette fois comme $e^{\frac{-1}{t}} >_{(-0)} (\frac{-1}{t})^{\alpha+2}$, f(t) est minorée au voisinage de
(1.b) -0, par $\frac{-1}{t^2}$ dont l'intégrale de RIEMANN du type $\int_0^x \frac{dt}{t^m}$ avec $m > 1$ diverge, **l'intégrale proposée diverge donc pour tout valeur de α.**

Support des points d'inflexion : Comme la question est posée, on ne cherche pas à démontrer qu'une
(2.a) solution est C^2, on le suppose (sinon il suffirait (sauf en 0) d'utiliser le transfert par $y' = \frac{x-y}{x^2}$). On dérivant les deux membres de (E) par rapport à x et remplaçant y" par 0 et y' par sa valeur tirée de (E), on a pour les points d'inflexion : $2xy' + x^2y" + y' = 1$ soit $(2x+1)y' = 1$ soit $(2x+1)\frac{x-y}{x^2} = 1$ ou encore $(2x+1)(x-y) = x^2$; c'est une courbe du second degré, donc une conique, du genre HYPERBOLE, car les termes de plus haut degré $x^2 - 2xy = x - x - 2y$ représentent deux droites réelles distinctes. Pour préciser ses caractéristiques on peut écrire $x(x-2y) + x - y = 0$ ou encore $(x+a)(x-2y+b) + x - y - ax + 2ay - bx - ab = 0$; on détermine a et b réels pour que $x - y - ax + 2ay - bx \equiv 0$ soit 2a=1 et 1-a-b=0 ou encore $a = \frac{1}{2} = b$; Les poins d'inflexion des solutions C^2 de (E) sont donc sur l'hyperbole $\boxed{\mathbf{(x+\frac{1}{2})((x-2y+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}}}$ dont les asymptotes sont en évidence.

Résoudre (E) : Sur les intervalles o x ne s'annule pas (E) s'écrit $y' = \frac{x-y}{x^2}$, donc y vérifie les hypothèses de
(2.b) CAUCHY LIPCHITZ, il existe une solution et une seule pour x dans ces intervalles respectivement, passant par un point donné. (E) est une équation différentielle du premier ordre LINÉAIRE, avec second membre : l'équation sans second membre s'écrit pour n non nul : $\frac{z'}{s} = \frac{-1}{x^2}$ soit $\ln|z| = \frac{1}{x} + \ln|C_k|$, o C_k est une constante arbitraire sur chaque intervalle I_k. et ainsi $z = C_k e^{\frac{1}{x}}$: Pour résoudre E on utilise la méthode mnémotechnique dite de "Variation de la constante" : on pose $y = ue^{\frac{1}{x}}$, $y' = u'e^{\frac{1}{x}} + ...$des termes qui se réduisent dans le report dans (E), et ainsi $x^2u'e^{\frac{1}{x}} = x$ soit $u' = \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}}$ et comme on ne cherche qu'une solution particulière on peut prendre $u_0 = \int_0^x \frac{dt}{t}e^{\frac{-1}{t}}$ sur $\mathbb{R}+^*$, (l'intégrale converge en 0, d'après **(1.a)**) et $u_0 = \int_{-1}^x \frac{dt}{t}e^{\frac{-1}{t}}$ sur $R-^*$. (on a mis la borne -1 pour ne pas avoir de problème de divergence en 0). La solution générale de (E) sur I_k est $\boxed{\mathbf{y = e^{\frac{1}{x}}(C_k + u_0)}}$

Trouver f ayant une limite nulle en 0 : Comme $e^{\frac{1}{x}}$ est infini en +0, et que $u_0(+0) = 0$ (intégrale convergente
(3.a) en +0), il faut prendre $C_2 = 0$, et cette valeur convient car alors : $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{dt}{t}e^{\frac{-1}{t}} = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x t\frac{dt}{t^2}e^{\frac{-1}{t}}$ et une intégration par parties donne $\left\{\begin{array}{l} u = t \\ dv = \frac{dt}{t^2}e^{\frac{-1}{t}} \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} du = dt \\ v = e^{\frac{-1}{t}} \end{array}\right.$ et $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\Big(\big[te^{\frac{-1}{t}}\big]_0^x - e^{\frac{1}{x}} \int_0^x te^{\frac{-1}{t}}dt\Big) = x - e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{\frac{1}{t}}dt$; Comme il y a une indétermination, du type $\infty \times 0$ quand x tend vers +0 on intègre la nouvelle intégrale J par parties en remarquant que $J = \int_0^x e^{\frac{1}{t}}dt = \int_0^x t^2 \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}dt$ et ainsi :

$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \frac{dt}{t^2}e^{\frac{-1}{t}} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} du = 2tdt \\ v = e^{\frac{-1}{t}} \end{matrix}$ soit $J = x^2 e^{\frac{1}{}} - 2\int_0^x te^{\frac{-1}{t}}dt$ et comme $|J| < xe^{\frac{-1}{x}}$ car $t \to \frac{-1}{t}$ est croissante ; On a bien f(x) tend vers 0 quand x tend vers +0. $\boxed{\mathbf{f(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{dt}{t} e^{\frac{-1}{t}}}}$.

Trouver g : Cette fois $C_1 e\frac{1}{x}$ tend vers zéro quel que soit C_1, pour x tendant vers -0 ; On a $y = C_1 e^{\frac{1}{x}} + h(x)$
(3.b) *(d'après la notation (4.b), il faut toujours lire l'énoncé en entier).* Tout revient à démontrer que h tend vers zéro en 0-. Plusieurs essais malheureux, prouvent qu'il faut scinder par CHASLES l'intégrale (comme pour CÉSARO !). Or on intégre une fois par parties l'intégrale y figurant, par la mme méthode qu'en **(3.a)** mais cette fois avec la borne -1. $h(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(xe^{\frac{-1}{x}} + e - \int_{-1}^x e^{\frac{-1}{t}}dt\right)$. $h(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(xe^{\frac{-1}{x}} + e - \int_{-1}^{2x} e^{\frac{-1}{t}}dt \int_{2x}^x e^{\frac{-1}{t}}dt\right)$;

Or $|\int_{-1}^{2x} e^{\frac{-1}{t}}dt| < (2x+1)e^{\frac{-1}{2x}}$ et son produit par $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0. De mme $|\int_{2x}^x e^{\frac{-1}{t}}dt| < |x - 2x|e^{\frac{-1}{x}} = |x|e^{\frac{-1}{x}}$ et de mme son produit par $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0. $\boxed{\mathbf{g(x) = C_1 e^{\frac{1}{x}} + h(x) \text{ pour } x < 0 \text{ avec } C_1 \text{ arbitraire}}}$

(le graphe en maple des solutions de (E) semble montrer que non ! la limite n'est pas 0 !)

Trouver $\mathbf{P_n}$: On intégre par parties l'intégrale $K_n = \int_0^x t^{n-1}e^{\frac{-1}{t}}dt = \int_0^x t^{n+11}\frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}}dt$ figurant dans J_n, ce qui
(4.a) donne : $\begin{cases} u = t^{n+1} \\ dv = \frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}}dt \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} du = (n+1)t^n \\ v = e^{\frac{-1}{t}} \end{matrix}$ par suite $K_n = x^{n+1}e^{\frac{-1}{x}} - (n+1)K_{n+1}$ ce qui donne en multipliant les deux membres par $(-1)^n n!$ $J_n = (-1)^n n! x^{n+1} e^{\frac{-1}{x}} + J_{n+1}$ et en décrémentant d'un indice : $J_n = (-1)^n(n-1)!x^n e^{\frac{-1}{x}} + J_{n-1}$; on ajoute toute ces relations décrémentées, dont la dernière est $J_1 = (-x)e^{\frac{-1}{x}} + j_0$ et on réduit les termes J_k qui apparaissent dans deux membre différents : On en déduit que $\boxed{\mathbf{P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!x^k}}$

Développement limités à droite des solutions de (E) : On a vu qu'il n'y en avait qu'une $f(x) = e^{\frac{1}{x}}J_0$
(4.b) (voir (3.a)) ; Donc $f(x) = e^{\frac{1}{x}}J_n(x) + P_n(x)$ fournit bien le développement limité de f, à l'ordre n ; (le fait que l'autre terme est un $o(x^n)$ se démontrerait en intégrant par parties exactement comme dans **(3.a)**.

Existence de solutions développables en séries entières au voisinage de 0 : La recherche d'une
(5) série formelle $y = a_0 + a_1 x + ...$ solution de (E) conduit par identification des coefficients des deux membres : $x^2(a_1 + a2_2 x + .. + na_n x^{n-1} + ...) + a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n + ... = x$ ce qui donne $a_0 = 0$ $a_1 = 1 ... a_{n+1} = -na_n = ... = (-1)^n n!$; Le critère de D'ALEMBERT donnerait que le rayon de convergence de cette série serait nul !

Existence de solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Comme on doit avoir un raccord de continuité en 0 d'après
(5) (3), la seule possibilité est qu'une telle fonction ait comme restriction f sur I_2 et g comme restriction sur I_1. Une telle fonction est déja continue et solution de l'équation sur $\mathbb{R}*$; elle est de plus dérivable en 0, d'après le résultat admis car $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} \to P'_n(0)$; et ainsi $C_1 e\frac{1}{x} + h(x)$ est bien dérivable en 0-. et h(x) est dérivable en 0+, les deux dérivées à droite et à gauche de 0 étant égales. *($e^{\frac{1}{x}}$ est de dérivée nulle en 0- car $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tend vers 0, quand x tend vers 0-).* En 0 (E) est bien vérifiée.

Toutes les fonctions $\mathbf{x \mapsto C_1 x + h(x)}$ pour $\mathbf{x > 0}$ et $\mathbf{x \mapsto h(x)}$ pour x positif sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Widiani M1 Carnot