Première épreuve : corrigé.

Première partie.

I

1. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ a pour rayon de convergence $R=1$ et
$$\forall x\in]-1,1[, \operatorname{Arctan} x \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$
En particulier, pour $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient $\frac{\pi}{6}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

2. Pour tout $x\in[0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est alternée et la valeur absolue de son terme général décroît vers 0 donc, en vertu du théorème des séries alternées,
$$\forall n\in\mathbf{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leq\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$
d'où
$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leq\frac{1}{2n+3}$$
Donc, par encadrement, $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\to 0$ quand $n\to+\infty$ ce qui signifie que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

   Posons $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}, x\mapsto(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Nous venons de montrer que $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Or $\forall n\geq 0, f_n$ est continue sur $[0,1]$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur $[0,1]$. En particulier
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(1)=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\overset{cf(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\operatorname{Arctan} x=\frac{\pi}{4} \tag{2}$$
....

3. En intégrant par parties, on obtient, $\forall x\in\mathbf{R}$,
$$\int_0^x\operatorname{Arctan} t\,dt=[t\operatorname{Arctan} t]_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,dt=x\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$
Avec les notations de 2., $\forall n\in\mathbf{N}, f_n$ est continue sur $[0,1]$ et $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, donc, par le théorème d'intégration pour les séries de fonctions, $\int_0^1\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\right)\,dt=\sum\limits_{n\geq 0}\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)$ c'est-à-dire, $\int_0^1\operatorname{Arctan} t\,dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\,dt\right)$ ou encore
$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \tag{3}$$

4. $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ d'où

$$\forall x \in]-1,1[, \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{4}$$

La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} 2\frac{x^{2n+1}}{2n=1}$ a pour rayon de convergence 1 car son domaine de convergence contient $]-1,1[$ d'après (4) et qu'elle est divergente pour $x=1$.

D'après (1) et (4), $\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \operatorname{Arctan} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x \tag{5}$$

De même,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x \tag{6}$$

II

1. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R supposé $r \quad r > 0$. On pose $\forall x \in]-R,R[, S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. D'où, $\forall x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
&2x(x+1)S''(x) + (5x+3)S'(x) + S(x) = \\
&\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 5n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n^2+5n+3)a_{n+1} + (2n^2+3n+1)a_n]x^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n]x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on en déduit que

$$\begin{aligned}
S \,\text{sol. de}\, (E) \,\text{sur}\,]-R,R[&\iff \forall n \in \mathbf{N}, (n+1)[(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n] = 0 \\
&\iff \forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = -\frac{(2n+1)}{(2n+3)}a_n \\
&\iff \forall n \in \mathbf{N}, a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}a_0
\end{aligned}$$

La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ a pour rayon de convergence 1 et d'après le calcul précédent, sa somme est solution sur $]-1,1[$ de (E). En outre,

$$\forall x \in]0,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n \overset{cf(1)}{=} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \tag{7}$$

et

$$\forall x \in]-1,0[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n \overset{cf(4)}{=} \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) \tag{8}$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{\text{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est solution de (E) sur $]0,1[$. On vérifie aisément par le calcul que cette fonction est en fait solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Notons

$$f:]-1,+\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (car DSE sur $]-1,1[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$) et solution de (E) sur cet intervalle. D'où vect(f) est inclus dans l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

2. Si $\alpha \in \mathbf{R}, x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[\iff \forall x > 0, x^{\alpha-1}[(2\alpha+1)(\alpha+1)x + \alpha(2\alpha+1)] = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = -\frac{1}{2}$.

   D'où $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$; en outre elle est linéairement indépendante de f. Or (E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients continus, celui de y'' ne s'annulant pas sur $]0,+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ est un $\mathbf{R}-$e.v. de dimension 2. Finalement

$$S_{]0,+\infty[}(E) = \{x \mapsto \lambda \frac{\text{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\mu}{\sqrt{x}}, (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

III

1. Si $|x| < 1, \sum u_n(x)$ est absolument convergente car $|u_n(x)| \sim \frac{|x|^{2n+1}}{4n+3} \leq |x|^n$.

   Si $x \in \{-1,1\}, \sum u_n(x)$ est absolument convergente car $|u_n(x)| = \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} \sim \frac{1}{8n^2}$.

   Si $|x| > 1, \sum u_n(x)$ est grossièrement divergente car $|u_n(x)| \sim \frac{|x|^{4n+1}}{4n+1} \to +\infty$.

   Le domaine (réel) de convergence de $\sum u_n$ est donc $[-1,1]$.

2. Si $x \in]0,1[, \sum \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et $\sum \frac{x^{2n+1}}{4n+3} = \sum \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{(\sqrt{x})^{4n+3}}{4n+3}$ sont convergentes et d'après (5) et (6)

$$S(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\text{Arctan}\sqrt{x}$$

   Quand $x \to 1^-$,

$$\frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\text{Arctan}\, x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\text{Arctan}\sqrt{x} \to 0$$

   et

$$-\frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x}) \to -\infty$$

   d'où

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = -\infty$$

3. On a vu que la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente de somme égale à $\frac{\pi}{4}$. Donc la série de terme général $u_n(1) = a_{2n} + a_{2n+1}$ est également convergente de même somme (car $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(1) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k$) d'où

$$S(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\forall n \in \mathbf{N}, u_n$ est continue sur $[0,1]$. Donc, si $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, S serait continue sur $[0,1]$ ce qui n'est pas le cas vu que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = -\infty$. Donc $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Elle ne converge pas non plus uniformément sur $[0,1[$ car si tel était le cas, vu que $\sum u_n(1)$ converge, la série de fonctions $\sum u_n$ convergerait uniformément sur $[0,1]$ (car $\|S_n - S\|_{\infty,[0,1]} = \max(\|S_n - S\|_{\infty,[0,1[}, |S_n(1) - S(1)|)$).

Deuxième partie.

I

1. $\forall (r,\theta) \in [0,R[\times \mathbf{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) & = & \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) & = & -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right.$$

2. Si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D'_R, r \neq 0$ d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \cos\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \sin\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{array}\right.$$

$\forall (r,\theta) \in]0,R[\times \mathbf{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + i\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{r}\mathrm{e}^{i\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$$

d'où

$$(\mathcal{H}) \iff (\mathcal{H}_1) : \forall (r,\theta) \in]0,R[\times\mathbf{R}, \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$$

3. Soit $n \in \mathbf{Z}$ fixé. L'application

$$f_n : [0,R[\times[0,2\pi] \to \mathbf{C}, (r,\theta) \mapsto \frac{1}{2\pi}g(r,\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}$$

est continue sur $[0,R[\times[0,2\pi]$, admet en tout point de $[0,R[\times[0,2\pi]$ une dérivée partielle par rapport à r égale à $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}$ et $\frac{\partial f_n}{\partial r}$ est continue sur $[0,R[\times[0,2\pi]$ (car g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,R[\times\mathbf{R})$ donc, en vertu du théorème de dérivation concernant les intégrales dépendant d'un paramètre, c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,R[$ et $\forall r \in [0,R[, c'_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta$.

D'après $(\mathcal{H}_1)$, on en déduit que $\forall r \in]0,R[, c'_n(r) = -\frac{i}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta$. En intégrant par parties, $c'_n(r) = \frac{-i}{2\pi r}\left(\left[g(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-in\theta}g(r,\theta)\,d\theta\right)$. Le crochet est nul par périodicité d'où

$$c'_n(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$$

On vient de voir que $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n$ est solution sur $]0,R[$ de l'équation différentielle

$$(E_n) : xy' - ny = 0$$

Or la solution générale de (E_n) sur $]0,R[$ est

$$x \mapsto \lambda x^n$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \exists \lambda_n \in \mathbf{C}, \forall r \in]0,R[, c_n(r) = \lambda_n r^n$$

Comme c_n est continue sur $[0, R[$, elle admet une limite finie à droite en 0 ce qui, pour $n < 0$ impose $\lambda_n = 0$. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}, \forall r \in [0, R[, c_n(r) = 0$$

Par ailleurs, $c_0(r) = \lambda_0 r^0 = \lambda_0 =$ cte sur $]0, R[$ et, par continuité en 0, $c_0(0) = \lambda_0$. Or $c_0(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(0,0)\mathrm{e}^{-i0}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0,0)\,d\theta = f(0,0)$.

Dans la suite, nous poserons $\forall n \in \mathbf{N}, c_n(r) = c_n r^n$.

4. Soit $r \in [0, R[$; l'application $g(r,\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \theta \mapsto g(r,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $2\pi-$périodique. En particulier, $g(r,\cdot)$ est $2\pi-$périodique, continue sur $\mathbf{R}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ donc en vertu du théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $g(r,\cdot)$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ de somme égale à $g(r,\cdot)$. Or les coefficients de Fourier exponentiels de $g(r,\cdot)$ sont les $c_n(r)$. Donc la somme d'ordre n de la série de Fourier de $g(r,\cdot)$ est égale à :

$$S_n(g(r,\cdot))(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(r)\mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} c_k r^k \mathrm{e}^{ik\theta}$$

On a donc

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, g(r,\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k \mathrm{e}^{ik\theta}$$

D'où

$$\forall z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta} \in D_R, f(z) = g(r,\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

Ceci prouve que f est développable en série entière en 0 (en particulier la série entière $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $\geq R$).

II

1. Si $f = P + iQ$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

et $f(0,0) = P(0,0) + iQ(0,0) = iQ(0,0)$. Donc f vérifie $(\mathcal{H})$ et $f(0,0) = 0$ si et seulement si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, Q(0,0) = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y) - \sin x \cos x(-2\sin x \cos x)}{(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y)^2} \\
&= \frac{\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x \,\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y \sin^2 x}{(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2\sin x \cos x \,\mathrm{sh}\, y \,\mathrm{ch}\, y}{(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y)^2}$$

La condition $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ équivaut à

$$\exists h \in \mathcal{C}^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbf{R}), Q(x,y) = \frac{\mathrm{sh}\, y \,\mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} + h(y)$$

Dans ces conditions,

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y \sin^2 x}{(\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y)^2} + h'(y)$$

et $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ est réalisé si et seulement si $h'(y) = 0$ $\quad$ h est constante. Enfin, $Q(0,0) = 0$ impose h est la fonction nulle. Donc

$$Q : D_R \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto Q(x,y) = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

vérifie les conditions requises.

A noter que la caractère $\mathcal{C}^1$ de Q (et de P d'ailleurs) est assuré par le fait que sur $D_{\frac{\pi}{2}}, \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ est toujours > 0.

Dans ces conditions, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f(x,0) = P(x,0) + iQ(x,0) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \tan x$ et $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f(0,y) = i \operatorname{th} y$.

2. D'après I, il existe $(c_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall z \in D_{\frac{\pi}{2}}, f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

   En particulier,

   $$\forall z = x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f(x,0) = \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

   et

   $$\forall z = iy, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f(0,y) = i \operatorname{th} y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n i^n y^n$$

   En fait, on peut remarquer que par imparité de tan, on a $\forall n \in \mathbf{N}, c_{2n} = 0$ d'où $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

   $$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} \text{ et } \operatorname{th} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c_{2n+1} x^{2n+1}$$

   Le fait que $\sum c_n x^n$ converge pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ prouve que la série entière $\sum c_n x^n$ a un R.C. $\geq \frac{\pi}{2}$ et le fait que $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tende vers $+\infty$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}^-$ que son R.C. est $\leq \frac{\pi}{2}$. Enfin la série entière $\sum c_n i^{n-1} y^n$ a même rayon de convergence que $\sum c_n x^n$ car $\forall n \in \mathbf{N}, |c_n| = |c_n i^{n-1}|$.