Ens Ulm Cachan 96 : Equation autonome associée à un champ de gradients

---

PARTIE I

1. Seul le c) justifie une indication: on prouve en fait par récurrence la majoration suivante:

   $\forall s \in [0,T] \quad \|(\mathcal{I}^m u - \mathcal{I}^m v)(s)\| \leq \dfrac{L^m s^m}{m!}\|u-v\|_{\infty,T}$

   dont la majoration demandée découle aussitôt.

---

2. a) $\mathcal{E}_T$ est stable par $\mathcal{I}$ car il suffit que u soit dans $\mathcal{E}_T$ pour appliquer ce qui précède. Dès que m est assez grand, $\dfrac{L^m s^m}{m!} < 1$ et 1c. nous montre alors que $\mathcal{I}^m$ est contractante. Or, il est bien connu que $\mathcal{E}_T$ est complet, de sorte que le théorème du point fixe donne le résultat.

   b) Si $u_{T,m}$ est le point fixe précédent, il est immédiat que $\mathcal{I}u_{T,m}$ est également fixe par $\mathcal{I}^m$. Par unicité, on a donc $\mathcal{I}u_{T,m} = u_{T,m}$ et il s'agit donc d'un point fixe de $\mathcal{I}$. Comme, inversement, tout point fixe de $\mathcal{I}$ est point fixe de $\mathcal{I}^m$, il n'y en a pas d'autre que celui-ci. On pourra donc le noter u_T.

---

3. La restriction de u_T à $[0,S]$ est un point fixe de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_S$, c'est donc u_S.

---

4. Les applications u_T se recollent: si, pour $t \in \mathbf{R}_+$, on définit $u(t) = u_T(t)$, ceci ne dépend pas du réel $T \geq t$ choisi. u est bien une application continue (propriété locale) et $\mathcal{I}u(t) = u(t)$ pour tout t donc $\mathcal{I}u = u$. C'est le seul point fixe de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}$, car la restriction à $[0,T]$ d'un point fixe de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}$ est nécessairement u_T, seul point fixe de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_T$.

---

5. u vérifie donc : $\quad u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t F(u(s))ds \quad , \quad t \geq 0.$

   Dès lors, les propriétés demandées ici sont évidentes.

---

6. Clair.

7. Par différence : $\quad \|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| = \displaystyle\int_0^t L\|u(s) - v(s)\|ds.$

   Le résultat découle alors de la propriété admise (lemme de Gronwall).

PARTIE II

La propriété (P) signifie en fait que les ensembles de niveau de f sont tous bornés.

1. a) est évident avec la remarque précédente.

   b) On obtient, en se plaçant dans une base orthonormale propre pour A , une expression $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2$ pour f. Si A est définie positive, $\lambda_i > 0$ pour tout i et chaque ensemble de niveau sera borné, puisque les coordonnées de $v \in \mathcal{F}_u$ devront vérifier $v_i^2 \leq f(u)/\lambda_i$. Si A n'est pas définie positive, l'un des λ_i au moins est négatif ou nul et $\mathcal{F}_0$ par exemple va contenir toute la droite dirigée par le i^{eme} vecteur de la base.

---

2. f_1 ne vérifie pas (P) puisqu'elle est associée à la matrice $-I_n$ qui n'est pas définie positive.

   f_2 vérifie (P) car les variations de $x \longmapsto x^2 - x$ pour $x > 0$ montrent qu'une condition de la forme $\|v\|^4 - \|v\|^2 \leq K$ impose que $\|v\|^2$ soit borné, et c'est le cas pour un ensemble de niveau.

---

3. a) $v \longmapsto \|v - u_0\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puisqu'elle s'écrit, en fonction des coordonnées sous la forme polynomiale $\sum_i (v_i - u_{0,i})^2$. Toutes les autres applications étant $\mathcal{C}^2$, il en est de même de f_0.

   b) F est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est nulle, comme f_0, lorsque $\|v - u_0\|^2 > 3R_0^2$, donc nulle en dehors d'un compact. Son application différentielle, continue, et nulle en dehors du même compact, est donc bornée. La propriété (2) découle alors du théorème des accroissements finis.

---

4. a) La dérivée demandée est $t \longmapsto df_0(u(t)).u'(t) = (-F(u(t)), u'(t)) = -\|F(u(t))\|^2$ puisque u vérifie (4). Cette dérivée est donc négative et $t \longmapsto f_0(u(t))$ décroit.

   b) résulte de cette décroissance.

---

5. Si $u(t)$ sortait de la boule considérée, il existerait une valeur t_1 de t pour laquelle $R_0 < \|u(t_1) - u_0\| \leq R_0^2$. Pour un tel t_1 on a $f_0(u(t_1)) = f(u(t_1))$ et donc $f(u(t_1)) \leq f(u_0)$. Mais $u(t_1)$ se trouverait alors dans $\mathcal{F}_{u_0}$ ce qui contredirait $\mathcal{F}_{u_0} \subset B(u_0, R_0)$.

   $u(t)$ reste bien dans la boule considérée.

---

6. $u(t)$ reste dans une boule sur laquelle f et f_0 (et donc aussi leurs gradients) coïncident. u est donc aussi solution de l'équation où f remplace f_0.

---

7. On a vu au 4a. que $t \longmapsto f(u(t)) = f_0(u(t))$ décroit. Comme on ne sort pas du compact $B'(u_0, R_0)$ sur lequel f , continue, est minorée, l'existence de la limite demandée est acquise.

PARTIE III

1. a) Ici $\nabla f(u) = u$ et les conditions imposées sont donc: $\dfrac{du}{dt} = -u$, $u(0) = u_0$. Il est clair que $u(t) = e^{-t}u_0$ convient. C'est donc la solution, unique.

   b) Cette fois $\nabla f(u) = \|u\|^2 u$ et on vérifie aisément que la solution proposée est bien la bonne.

---

2. a) est évident.

   b) Remarquons que pour $t_1 \geq 0$ fixé, l'application $t \longmapsto u(t + t_1)$, $t \geq 0$, vérifie (4) et vaut $u(t_1)$ pour $t = 0$. C'est donc la solution qui correspond à la valeur initiale $u(t_1)$. Autrement dit, $S(t)u(t_1) = u(t + t_1)$. Comme $u(t_1) = S(t_1)u_0$ et $u(t + t_1) = S(t + t_1)u_0$ et que ceci vaut pour tout u_0, on a établi $S(t + t_1) = S(t) \circ S(t_1)$, résultat voulu.

---

3. n'est qu'une réécriture de II5.

---

4. Les solutions u et v associées aux points u_0 et v_0 sont bornées, comme toutes les solutions. Quitte à agrandir le R_0 qui a été choisi pour u_0, on peut supposer que $B(u_0, R_0)$ contient aussi tous les points $v(t)$. Dès lors, il suffit de considérer ∇f_0 au lieu de ∇f. Comme on l'a vu au II3b., $-\nabla f_0$ vérifie (2) avec un certain L. En prenant $M_0 = L$, la propriété demandée n'est qu'une réécriture de I7.

---

5. découle de la question III2b.

---

6. Chaque $\mathcal{O}(s, u_0)$ est borné, car u l'est. Les adhérences envisagées sont donc fermées bornées et donc compactes. Comme il est clair que pour $s \leq s'$ on a $\mathcal{O}(s', u_0) \subset \mathcal{O}(s, u_0)$, on peut se limiter à prendre l'intersection pour $s \in \mathbf{N}$. Il s'agit alors d'une suite décroissante de compacts non vides, et l'intersection est bien non vide.

   (Rq: On peut montrer que toute intersection d'une suite décroissante de compacts connexes est aussi connexe. C'est le cas ici, car les $\mathcal{O}(s, u_0)$ sont connexes par arcs, mais la connexité n'étant plus au programme, nous omettrons la démonstration de ce résultat).

---

7. Si (i) est vérifié, on peut, en prenant $s = n \in \mathbf{N}$ trouver $t_n \geq n$ tel que $\|v - S(t_n)u_0\| \leq 1/n$. Cette suite (t_n) vérifie (ii).

   Si (ii) est vérifiée, $t_m \geq s$ pour m assez grand. Dès lors $S(t_m)u_0 \in \mathcal{O}(s, u_0)$ et on a bien $v \in \mathcal{O}(s, u_0)$ pour tout s.

---

8. Soit $t \geq 0$ et $v \in \omega(u_0)$. Il existe donc une suite $(S(t_m)u_0)$ de limite v. La question III4. permet d'écrire pour tout m: $\|S(t)v - S(t)(S(t_m)u_0)\| \leq e^{M_0 t}\|v - S(t_m)u_0\|$. En effet, M_0 dépend a priori de v et de $S(t_m)u_0$, mais en réalité la question III4. a montré que M_0 ne dépendait que d'une boule fermée assez grande pour contenir les orbites des points envisagés. Comme l'orbite de $S(t_m)u_0$ est incluse dans celle de u_0, il suffit de choisir une boule contenant l'orbite de u_0 et celle de v.

   Il apparaît alors que $S(t)v$ est la limite de $S(t + t_m)u_0$ et appartient donc à $\omega(u_0)$. On a ainsi prouvé l'inclusion $S(t)\omega(u_0) \subset \omega(u_0)$.

   Réciproquement, soit $v \in \omega(u_0)$ et une suite $(S(t_m)u_0)$ de limite v. On peut supposer $t_m \geq t$, d'où v limite de $(S(t)S(t_m - t)u_0)$. Mais de $(S(t_m - t)u_0)$ qui est bornée, on peut extraire une suite convergente et sa limite est alors dans $\omega(u_0)$. En raisonnant comme dans le sens direct, on conclut que $v = S(t)w$, ce qui établit la seconde inclusion.

---

9. Dans les deux cas $S(t)u_0$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, donc $\omega(u_0)$ se réduit au singleton $\{0\}$.

PARTIE IV

1. a) $v \in \omega(u_0)$ est limite d'une suite $(S(t_m)u_0)$. Comme f est continue, $f(v)$ est limite de la suite $(f(S(t_m)u_0))$ c'est à dire $f(u(t_m))$ et on a vu au II7. que cette limite est précisément $l(u_0)$.

   b) Pour tout t, $S(t)v \in \omega(u_0)$ d'après III8. Donc on a aussi $f(S(t)v) = l(u_0)$.

   Ainsi $t \longmapsto f(S(t)v) = f(v(t))$ est constante et donc de dérivée nulle. Cette dérivée a été calculée au II4a., c'est $-\|\nabla f(v(t))\|^2$. ∇f est donc nul en tout $v(t)$ et en particulier en $v(0) = v$.

---

2. a) Le jacobien en v de l'application ∇f (qui va de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ et est de classe $\mathcal{C}^1$) n'est autre que $J(v)$.

   Lorsque $v_0 \in \mathcal{N}$, le théorème d'inversion locale s'applique donc. Il assure notamment l'existence d'un voisinage V de v_0 sur lequel ∇f est injective. Sur V , ∇f ne s'annule donc qu'en v_0, ce qu'on voulait.

   b) Si cet ensemble n'était pas fini, il admettrait, dans le compact $B(0, R)$ un point d'accumulation a. Par continuité de ∇f, on aurait $\nabla f(a) = 0$, et ce zéro a ne serait pas isolé.

3. $\omega(u_0)$ est inclus dans $\mathcal{N}$ d'après IV1. Comme il est compact (III6.), il est aussi inclus dans une boule $B(0, R)$. Il est donc fini d'après IV2. Comme il est aussi connexe, c'est un singleton.

RQ: Pour éviter d'utiliser la connexité, que nous avons admise, de $\omega(u_0)$, on peut raisonner par l'absurde. Supposons que cet ensemble contienne au moins deux points v et v', et choisissons un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$ qui ne rencontre pas $\omega(u_0)$ et tel que v et v' soient de part et d'autre de H (c'est possible puisque $\omega(u_0)$ est fini). v est limite d'une suite $(S(t_m)u_0) = (u(t_m))$ et on peut supposer, quitte à éliminer les premiers termes, que les points de cette suite sont du même côté de H que v. v' est limite d'une suite $(S(t'_m)u_0) = (u(t'_m))$ pour laquelle on fait la même hypothèse. Par continuité, il existe entre t_m et t'_m une valeur t''_m telle que $u(t''_m) \in H$. Comme l'orbite de u_0 est bornée, on peut extraire de la suite $(S(t''_m)u_0) = (u(t''_m))$ une suite convergente. Mais la limite de cette suite fournirait alors un élément de $\omega(u_0)$ appartenant à H, et donc une contradiction).

b) Chaque suite $(S(t_m)u_0)$, c'est à dire $(u(t_m)$ où $t_m \mapsto +\infty$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, puisque ses suites extraites ne peuvent converger que vers l'unique point de $\omega(u_0)$, que nous nommerons $v(u_0)$.

Comme cette suite est incluse dans un compact $B(u_0, R_0)$, elle est convergente, de limite $v(u_0)$. La caractérisation séquentielle des limites assure donc que $u(t)$ admet pour limite $v(u_0)$ quand $t \mapsto +\infty$.

---

4. a) Ici, on obtient $\nabla f(u) = -4u(1 - \|u\|^2)$, de sorte que $\mathcal{N}$ est la réunion de 0 et de la sphère unité.

b) Les points de $\mathcal{N}$ ne sont pas tous isolés, donc (8) ne peut avoir lieu (et le calcul de $J(v)$ en un point de la sphère unité le confirme).

c) On peut essayer de résoudre explicitement l'équation (4)-(5) $\dfrac{du}{dt} = 4u(1 - \|u\|^2) \quad , \quad u(0) = u_0$.

• Si $\|u_0\| = 0$ ou 1 , la solution est constante égale à u_0 et $\omega(u_0) = \{u_0\}$.

• Si $0 < \|u_0\| < 1$, on peut "en calculant comme dans $\mathbf{R}$ " deviner $u(t) = u_0(\|u_0\|^2 + e^{-8t}(1 - \|u_0\|^2)^{-\frac{1}{2}}$ dont on vérifie qu'elle convient. Il apparaît alors que $\omega(u_0)$ se réduit à $\dfrac{u_0}{\|u_0\|}$.

• Calcul comparable et même résultat lorsque $\|u_0\| > 1$.

d) La conclusion est que la condition (8) est suffisante mais pas nécessaire pour que $\omega(u_0)$ se réduise à un singleton quel que soit u_0.
