Partie I.

1. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$. Enfin, $\int_0^1 t \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, soit $\alpha < 2$. En conclusion, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est dans E si et seulement si

$$\alpha \in \left]0, 2\right[.$$

2. La fonction $t \mapsto t+x$ envoie $\mathbf{R}_+^*$ sur $\left]x, +\infty\right[\subset \mathbf{R}_+^*$ pour tout $x > 0$, elle est continue, croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} t+x = +\infty$, donc par composition, $t \mapsto f(t+x)$ est continue, décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t+x) = 0$.

$t \mapsto f(t+x)$ est de plus positive sur $\mathbf{R}_+^*$, et se prolonge par continuité à $\mathbf{R}_+$ donc l'intégrale de $t \mapsto tf(t+x)$ sur $]0,1]$ est convergente. Il en résulte que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(t+x)$ est un élément de E.

3. $(a_k)_{k \geq 1}$ étant une suite croissante de réels strictement positifs convergeant vers $+\infty$, la suite $(f(a_k))_{k \geq 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0. La série de terme général $(-1)^k f(a_k)$ est donc alternée, et le critère spécial s'applique. Il en résulte la convergence de cette série.

4. (a) La fonction $t \mapsto f(t) \sin t$ est continue et positive sur $]0, \pi]$ et au voisinage de 0, $f(t) \sin t$ est équivalent à $tf(t)$ donc par la règle des équivalents, l'intégrale $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt$ est convergente.

(b) Pour tout entier naturel $k \geq 1$ et pour tout t de $[k\pi, (k+1)\pi]$,
$\sin t = (-1)^k |\sin t|$ d'où

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \sin t \, dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \, dt$$

(c) f étant décroissante, pour tout $k \geq 1$, et pour tout t de $[k\pi, (k+1)\pi]$

$$f((k+1)\pi) |\sin t| \leq f(t) |\sin t| \leq f(k\pi) |\sin t|$$

puis

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f((k+1)\pi) |\sin t| \, dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \, dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(k\pi) |\sin t| \, dt$$

et comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t \, dt = 2$, il en résulte :

$$2f((k+1)\pi) \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \, dt \leq 2f(k\pi) \ .$$

f étant continue sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, il existe un réel a_k (d'ailleurs unique par la monotonie de f) de cet intervalle tel que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\;dt = 2f(a_k)$.

(d) Pour tout $n \geq 1$, par la relation de Chasles, et compte-tenu de la convergence de $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$,

$$\begin{aligned} U_n = \int_0^{n\pi} f(t)\sin t\,dt &= \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt + 2\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(a_k). \end{aligned}$$

Comme pour tout $k \geq 1$, $a_k \leq (k+1)\pi \leq a_{k+1}$, $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$, donc grâce au **I-**3- la série $\sum_{k\geq 1} (-1)^k f(a_k)$ converge. La convergence de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ résulte de la convergence de la suite des sommes partielles de cette série.

(e) Notons $l = \lim_{n\to\infty} U_n$. Pour $X > 0$ et $n = \left[\frac{X}{\pi}\right]$,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^X f(t)\sin t\,dt - l\right| &\leq \left|\int_0^{n\pi} f(t)\sin t\,dt - l\right| + \left|\int_{n\pi}^{X} f(t)\sin t\,dt\right| \\ &\leq |U_n - l| + \int_{n\pi}^{X} f(t)\,|\sin t|\;dt \\ &\leq |U_n - l| + \int_{n\pi}^{X} f(t)\;dt \\ &\leq |U_n - l| + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\;dt \quad . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$: $\exists A \in \mathbf{R}_+^*, \forall t \in \mathbf{R}_+^*, t > A \Rightarrow 0 < f(t) < \frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Alors, pour tout X de $\mathbf{R}_+^*, X > A + \pi \Rightarrow 0 < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\;dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus, $\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $X > \max(A+\pi, N\pi) \Rightarrow \left|\int_0^X f(t)\sin t\,dt - l\right| < \varepsilon$.

Cela signifie : $\exists \lim_{X\to+\infty} \int_0^X f(t)\sin t\,dt = l$, d'où la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$.

5. Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f(t)\sin t\,dt \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(u+\pi)\sin u\,du \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} (f(t) - f(t+\pi))\sin t\,dt \geq 0 \end{aligned}$$

car, f étant décroissante, il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment.

On a donc, pour tout $p \geq 1$, $U_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt \geq 0$, donc $l = \lim_{p\to\infty} U_{2p} \geq 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \geq 0.$$

6. Par le changement de variable $u = t - x$,

$\int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\;dt = \int_0^{+\infty} f(u+x)\sin u\,du$ et cette dernière intégrale converge pour tout $x > 0$ puisqu'alors $u \mapsto f(u+x)$ est dans E.

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$,
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t) \cos t \, dt$ converge.

La fonction $t \mapsto f(t) \cos t$ étant continue sur $\mathbf{R}_+^*$, les intégrales $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t) \cos t \, dt$ et $\int_x^{+\infty} f(t) \cos t \, dt$ sont de même nature pour tout $x > 0$.

Il en résulte la convergence de $\int_x^{+\infty} f(t) \cos t \, dt$.

7. (a) Par le 4.(c) : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \; dt \geq 2f((k+1)\pi)$.

D'autre part, f étant décroissante sur $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$,
$\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t) \; dt \leq \pi f((k+1)\pi)$ d'où

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \; dt \geq \frac{2}{\pi} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t) \; dt \; .$$

(b) $(i) \Rightarrow (ii)$ La convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) |\sin t| \; dt$ entraîne celle de la suite $\left(\int_0^{n\pi} f(t) |\sin t| \; dt\right)_{n\geq 0}$ donc celle de la série $\sum\limits_{k\geq 0} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \; dt$.

Par comparaison de séries à termes positifs, il en résulte la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 0} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t) \; dt$, donc de la suite définie par $V_n = \int_{\pi}^{(n+2)\pi} f(t) \; dt$.

On montre de même qu'au 4.(e) que la convergence de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ implique celle de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} f(t) \; dt$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Pour tout t de $\mathbf{R}_+^*$, $|f(t) \sin t| \leq f(t)$, donc par comparaison, $\int_{\pi}^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$ est absolument convergente. Comme $\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt$ est convergente d'après 4.(a) et que la fonction à intégrer est positive, il en résulte que $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$ est absolument convergente.

8. Si $\alpha \in \left]0, 2\right[$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est dans E, et ce qui précède s'applique donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente, soit si $\alpha > 1$.

Si $\alpha \geq 2$, alors $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et il y a divergence à la borne 0.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha \in \left]1, 2\right[$.

Partie II.

1. Les solutions sur $\mathbf{R}$ de $Y'' + Y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

2. Par la méthode de variation des constantes, les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de (2) : $Y'' + Y = f$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto A(x) \cos x + B(x) \sin x$

où A et B sont les fonctions de classe au moins 1 sur $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant, pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x & = & 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x & = & f(x) \end{cases}$$

soit encore :$A'(x) = -\sin x\, f(x)$ et $B'(x) = \cos x\, f(x)$.

3. Pour tout $x > 0$,

$Y_f(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\ dt = \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$

.

Compte-tenu de la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ et $\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ (pour tout $x > 0$), les fonctions $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ et $x \mapsto -\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ sont respectivement les primitives de $x \mapsto -f(x)\sin x$ et $x \mapsto f(x)\cos x$ qui tendent vers 0 en $+\infty$, et en particulier ce sont des fonctions A, B de la forme indiquée au **II.**2., donc Y_f est solution de (2) sur $\mathbf{R}_+^*$.

4. Pour tout $x > 0$, $Y_f(x) = \int_0^{+\infty} f(u+x)\sin u\,du$ avec $u \mapsto f(u+x)$ dans E, donc par le **I.**5. Y_f est positive sur $\mathbf{R}_+^*$.

De plus, $$\begin{aligned} |Y_f(x)| &= \left|\cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\right| + \left|\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{+\infty} Y_f = 0.$$

5. Soit Y une solution de (2) sur $\mathbf{R}_+^*$ qui converge vers 0 à l'infini. Alors, $Y - Y_f$ est solution de l'équation homogène associée, donc

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall x > 0,\ Y(x) - Y_f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$

$\lim\limits_{+\infty}(Y - Y_f) = 0$ impose alors $\lambda = \mu = 0$, d'où $Y = Y_f$.

6. (a) Si $0 < x < x_0$, on a les majorations successives:

$\left|\sin x \int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| \leq x \int_x^{x_0} f(t)|\cos t|\ dt \leq \int_x^{x_0} t\,f(t)\ dt \leq \int_0^{x_0} t\,f(t)\ dt$

(b) $$\begin{aligned} \left|\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| &\leq \left|\sin x \int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| + \left|\sin x \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \\ &\leq \int_0^{x_0} t\,f(t)\ dt + \left|\sin x \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. $\int_0^1 t\,f(t)\ dt$ converge, donc $\exists x_0 > 0,\ 0 < \int_0^{x_0} t\,f(t)\ dt < \frac{\epsilon}{2}$.

Pour x_0 ainsi fixé, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt = 0$ donc

$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]0, \eta[,\ \left|\sin x \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

On a alors

$$\left|\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| < \epsilon$$

(c) Pour tout $x > 0$, $Y_f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$

D'après l'étude de la partie **I**, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$, et par ce qui précède, $\exists \lim\limits_{x\to 0} \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt = 0$, donc

$\exists \lim_{x\to 0} Y_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$, ce qui signifie que Y_f est prolongeable par continuité en 0 en posant :

$$Y_f(0) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin t \, dt \; .$$

7. (a) Avec $0 < x < y$, et f décroissante, la fonction
$h : t \mapsto f(x+t) - f(y+t)$ est positive sur $\mathbf{R}_+^*$; de plus elle est continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ avec $h'(t) = f'(x+t) - f'(y+t) < 0$ puisque f' est supposée croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. h est donc décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. On a aussi $\lim_{+\infty} h = 0$ et la convergence de l'intégrale de $t \mapsto t\, h(t)$ sur $[0,1]$ puisqu'il s'agit d'une fonction continue sur ce segment. On a bien :

$$h \in E \; .$$

$Y_f(x) - Y_f(y) = \int_0^{+\infty} f(u+x) \sin u \, du - \int_0^{+\infty} f(u+y) \sin u \, du = \int_0^{+\infty} h(u) \sin u \, du$
et comme h est dans E, le **I**.5. permet de conclure que $Y_f(x) - Y_f(y) \geq 0$ pour $0 < x < y$, donc que Y_f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est élément de E si $\alpha \in]0,2[$, et dans ces conditions il s'agit d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, sa dérivée est $t \mapsto \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$ qui est alors croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Les réels α convenables sont encore ceux de $]0,2[$.

Partie III

1. Pour tout x de $\mathbf{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, et
$\forall t \in \mathbf{R}_+, 0 < \frac{e^{-tx}}{1+t^2} < \frac{1}{1+t^2}$;
la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

2. (a) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\lim Arctant]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.
Pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^2$ tel que $0 \leq x \leq y$, et pour tout t de $\mathbf{R}_+$, $e^{-tx} \geq e^{-ty}$, d'où $\frac{e^{-ty}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ puis $F(y) \leq F(x)$.
La fonction F est donc décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
(b) Pour tout $x > 0$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x} \; .$$

d'où

$$\lim_{+\infty} F = 0.$$

3. Pour tout x de $\mathbf{R}$, et pour tout t de $[0,n]$,
$|\varphi_k(t)| = \frac{(t|x|)^k}{(1+t^2)\, k!} \leq \frac{(n|x|)^k}{k!} = \alpha_k$.

$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{n|x|}{k+1}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc par la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \alpha_k$ converge, et la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge normalement sur $[0,n]$.

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, de rayon de convergence $+\infty$, on peut écrire, pour tout x de $\mathbf{R}$:

$F_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^n \left(\frac{1}{1+t^2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-tx)^k}{k!} \right) dt = \int_0^n \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t) \right) dt$

et puisque la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[0,n]$, on peut intégrer terme à terme : $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_0^n \varphi_k(t) dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \int_0^n \frac{t^k}{(1+t^2)} dt$
.

4. Ce qui précède montre que F_n est somme de la série entière $\sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$, avec $a_k = (-1)^k \frac{1}{k!} \int_0^n \frac{t^k}{(1+t^2)} dt$.

Comme l'égalité $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est valable pour tout x de $\mathbf{R}$, le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. F_n est donc de classe C^∞ sur l'intervalle de convergence, c'est-à-dire $\mathbf{R}$.

Ses dérivées successives sont les sommes des séries dérivées terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad F_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k-p}}{(k-p)!} \int_0^n \frac{t^k}{(1+t^2)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+p} \frac{x^k}{k!} \int_0^n \frac{t^{k+p}}{(1+t^2)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \int_0^n (-t)^p \frac{t^k}{(1+t^2)} dt\ . \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t^p$ est bornée sur $[0,n]$, donc on justifie de même qu'au **III.**3. la convergence normale sur $[0,n]$ de la série de fonctions de terme général $\psi_k(t) = (-t)^p \frac{(-tx)^k}{(1+t^2)\, k!}$.

On peut donc permuter les symboles $\sum$ et $\int$ et

$F_n^{(p)}(x) = \int_0^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-t)^p \frac{(-tx)^k}{(1+t^2)k!} dt = \int_0^n \frac{(-t)^p e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

5. Pour tout x de $\mathbf{R}_+$,

$F(x) - F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt - \int_0^n \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_n^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$,

donc $0 \leq F(x) - F_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \lim Arctann$.

Cet encadrement montre la convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$ de la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ vers F. Il en résulte, puisque chaque F_n est continue sur $\mathbf{R}_+$, la continuité de F sur $\mathbf{R}_+$.

6. (a) Etant donné $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t\, e^{-tx_0}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+$. De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \frac{t\, e^{-tx_0}}{1+t^2} = 0$ donc pour t assez grand, $0 < \frac{t\, e^{-tx_0}}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$ et la convergence de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ implique celle de $\int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-tx_0}}{1+t^2} dt$.

(b) Soit G la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$, et $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ fixé.

$F_n'(x) - G(x) = \int_0^n \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_n^{+\infty} \frac{t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$

donc pour tout x de $[x_0, +\infty[$,

$0 \leq F_n'(x) - G(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{t\,e^{-tx_0}}{1+t^2}\,dt = \beta_n$

et vu la convergence établie au (a), $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, d'où la convergence uniforme sur tout intervalle $[x_0, +\infty[$ inclus dans $\mathbf{R}_+^*$ de la suite de fonctions $(F_n')_{n\geq 1}$ vers G.

(c) Les fonctions F_n sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, il existe au moins un réel x_1 de $\mathbf{R}_+^*$ tel que la suite $(F_n(x_1))_{n\geq 1}$ soit convergente, la suite de fonctions $(F_n')_{n\geq 1}$ converge uniformément vers G sur tout intervalle $[x_0, +\infty[$ inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, donc la limite F de $(F_n)_{n\geq 1}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, et pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$,

$$F'(x) = G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\ .$$

7. On peut montrer de même que :

- l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx_0}}{1+t^2}\,dt$ est convergente pour tout $x_0 > 0$.
- la suite de fonctions F_n'' converge uniformément sur tout intervalle $[x_0, +\infty[$ inclus dans $\mathbf{R}_+^*$ vers la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.
- par application du théorème de dérivation des suites de fonctions de classe C^1 à $(F_n')_{n\geq 1}$, F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$,

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

On a donc : $\forall x > 0$, $\quad F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$
$= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty}$
$= \frac{1}{x}$.

8. $\forall x > 0, \quad \frac{F(x)-F(0)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}-1}{x(1+t^2)}\,dt$

$\left|\frac{F(x)-F(0)}{x}\right| = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{x(1+t^2)}\,dt \geq \int_0^{1/x} \frac{1-e^{-tx}}{x(1+t^2)}\,dt$

vu la positivité de l'intégrande.

D'autre part, pour tout u de $[0,1]$, $e^{-1} \leq e^{-u} \leq 1$ donc $u\,e^{-1} \leq \int_0^u e^{-t}\,dt \leq u$ et en particulier, $1 - e^{-u} \geq u\,e^{-1}$.

Pour tout t de $[0, 1/x]$, $tx \in [0,1]$ donc $\frac{1-e^{-tx}}{x} \geq t\,e^{-1}$.

On obtient : $\left|\frac{F(x)-F(0)}{x}\right| \geq \int_0^{1/x} \frac{1-e^{-tx}}{x(1+t^2)}\,dt \geq e^{-1} \int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

Comme $\frac{t}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, l'intégrale de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[$ est divergente et comme cette fonction est positive, $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt = +\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{F(x)-F(0)}{x}\right| = +\infty$

ce qui prouve que F n'est pas dérivable en 0.

9. Les résultats du **III**.2.(b) et **III**.7. montrent que F est l'unique solution de (2) (avec la fonction f de $E : t \mapsto \frac{1}{t}$) sur $\mathbf{R}_+^*$ qui tend vers 0 en $+\infty$ (cf **II**.5.). Donc sur $\mathbf{R}_+^*$, $F = Y_f$ (cf **II**.3.et 4.).

En utilisant le prolongement par continuité en 0 de Y_f au **II**.6.(c) et la valeur de $F(0)$ obtenue au **III**.2.(a) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} .$$

Partie IV.

1. L'intégrale $I_\beta = \int_0^{+\infty} \sin\left(u^\beta\right) du$ est de même nature que celle déduite par le changement de variable $t = u^\beta$: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} \sin t \, dt$.

Pour $\beta > 1,\ \alpha = 1 - \frac{1}{\beta} \in \left]0, 1\right[$ donc grâce aux **I**.1. et **I**.4., cette dernière intégrale est convergente.

On a alors l'égalité des deux intégrales, soit :

$$I_\beta = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}} \, dt .$$

2. $\beta I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}} \, dt$ et l'intégration par parties suivante est licite :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin t \quad , & u(t) = 1 - \cos t \\ v(t) = \frac{1}{t^{1-1/\beta}} & v'(t) = -\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{t^{2-1/\beta}} \end{array}$$

en effet $(u\,v)(t) = \frac{1-\cos t}{t^{1-1/\beta}} \underset{0}{\sim} \frac{t^{1+1/\beta}}{2}$, donc $u\,v$ se prolonge par continuité en 0 en posant $(u\,v)(0) = 0$, et $|(u\,v)(t)| \leq \frac{2}{t^{1-1/\beta}}$ donc $\exists \lim\limits_{t \to +\infty} (u\,v)(t) = 0$.

On a donc :

$\beta I_\beta = \left[\frac{1-\cos t}{t^{1-1/\beta}}\right]_0^{+\infty} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{2-1/\beta}} dt = \frac{\beta - 1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{2-1/\beta}} dt$,

ce qui équivaut à $\frac{\beta^2}{\beta-1} I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{2-1/\beta}} dt$.

En intégrant par parties de manière analogue, on obtient :

$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt$ d'où en combinant :

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{\beta-1} I_\beta &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{2-1/\beta}} dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) \left(t^{1/\beta - 2} - t^{-2}\right) dt. \end{aligned}$$

3. (a) Pour $t > 0$, par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction cos sur $[0, t]$:

$|\cos t - 1| \leq \frac{t^2}{2} \sup\limits_{u \in [0,t]} |-\cos u| = \frac{t^2}{2}$.

De manière évidente, pour tout t de $\mathbf{R}$, $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$, donc en rassemblant les deux résultats :

$$\forall t > 0,\ 0 \leq 1 - \cos t \leq \min\left(\frac{t^2}{2}, 2\right) .$$

(b) En utilisant ce qui précède :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt\right| &\leq \left|\int_0^2 \frac{t^2}{2}\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt\right| + \left|\int_2^{+\infty} 2\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2}\int_0^2\left(t^{1/\beta}-1\right)dt\right| + \left|\int_2^{+\infty} 2\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{t^{1/\beta+1}}{1/\beta+1}-t\right]_0^2 + 2\left[\frac{t^{1/\beta-1}}{1/\beta-1}+t^{-1}\right]_2^{+\infty} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2^{1/\beta+1}}{1/\beta+1}-2\right) - 2\left(\frac{2^{1/\beta-1}}{1/\beta-1}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\beta^2}{\beta^2-1}2^{1+1/\beta}-2\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^2}{\beta^2-1}2^{1+1/\beta}=2$ donc

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt = 0\ .$$

(c) Par le **IV**.2. $I_\beta = \frac{\beta-1}{\beta^2}\frac{\pi}{2} + \frac{\beta-1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\left(t^{1/\beta-2}-t^{-2}\right)dt$. Le premier terme est équivalent à $\frac{\pi}{2\beta}$, et le second est négligeable devant $\frac{1}{\beta}$ d'après ce qui précède, donc

$$I_\beta \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\beta}\ .$$

4. Par le **I**.5., puisque la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^{1-1/\beta}}$ est dans E pour $\beta>1$,
$\beta I_\beta = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt \geq 0$.

De plus, en écrivant $\beta I_\beta = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt$

et en utilisant les résultats du **I**.4., la série $\sum\limits_{k\geq1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt$ est alternée et converge par le critère spécial, donc sa somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt$ est du signe du premier terme $\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt$, donc négative car sur $[\pi,2\pi]\,,\sin t\leq 0$.

Il en résulte :

$$\forall\beta>1,\ 0\leq\beta I_\beta\leq\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt\ .$$

$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}dt \leq \int_0^{\pi}\frac{1}{t^{1-1/\beta}}dt = \left[\beta t^{1/\beta}\right]_0^{\pi} = \beta\pi^{1/\beta}\leq\beta\pi$ pour tout $\beta>1$.
Donc :

$$\forall\beta>1,\ 0\leq I_\beta\leq\pi\ .$$