Corrigé de l'épreuve commune Maths 1 — ICARE 1996

Partie I

1°) Remarque : on a affaire à une fonction Bêta déguisée.
a) Une intégration par parties à crochet nul donne :

$$J_{[n,m]}(x) = \frac{n}{m+1} J_{[n-1,m+1]}(x) \tag{R}$$

b) D'abord $J_{[0,n+m]}(x) = \int_0^x t^{m+n}\, dt = \dfrac{x^{m+n+1}}{m+n+1}$.
En utilisant plusieurs fois (R), on en déduit

$$J_{[n,m]}(x) = \frac{n(n-1)\dots 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)} x^{m+n+1} = \frac{n!m!}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}$$

c) De $(x-t)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{p}{n} (-1)^p t^p x^{n-p}$ on déduit

$$J_{[n,m]}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{p}{n} (-1)^p \frac{x^{m+n+1}}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!(m+p+1)} x^{m+n+1}$$

2°) Avec $x = 1$ il vient en rapprochant les deux valeurs de $J_{n,m}$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!(n-p)!(m+p+1)} = \frac{m!}{(m+n+1)!}$$

Partie II

1°) $\int_0^x e^{x-t} e^t\, dt = x.e^x$.

2°) $\int_0^x (x-t)^k t^k\, dt = J_{[k,k]}(x) = \dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ d'après I.

3°)

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t)(t-(x-1))} = \frac{1}{2-x} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t-(x-1)} \right) = \frac{1}{2-x} \left[\ln \frac{t-(x-1)}{1-t} \right]_0^x = -2\frac{\ln(1-x)}{2-x}$$

4°) Ici l'intégrande est nul sauf quand t et $x-t$ sont dans $[0,1]$, c'est à dire quand

$$t \in [0,1] \cap [x-1, x] \cap [0, x]$$

Si $x \geq 2$ ou $x \leq 0$, ça fait 0.
Sinon, il reste $\int_0^x 1$ pour $0 < x < 1$ et $\int_{x-1}^1 1$ pour $1 < x < 2$.
Reste une fonction affine par morceaux, qui vaut successivement $0, x, 2-x, 0$ sur les intervalles $]-\infty, 0], [0,1], [1,2], [2,+\infty[$.

Partie III

Notons que le théorème du cours sur les produits de séries entières ne s'applique pas ici (on multiplie des DSE en 0 et en x !) mais celui sur les produits de séries absolument convergentes s'applique, puisque $|t|, |x-t| < R$. Il nous faudrait un peu plus pour justifier l' intégration terme à terme – disons la convergence normale.
On a en tout cas

$$f(x-t)\times f(t) = \left(\sum_{i\geq 0} \frac{a_i\, t^i}{i!}\right)\cdot\left(\sum_{q\geq 0} \frac{a_q\,(x-t)^q}{q!}\right) = \sum_{n\geq 0}\sum_{i+q=n} a_i a_q \frac{t^i\,(x-t)^q}{i!\; q!}$$

Comme l'énoncé nous y invite, laissons tomber nos complexes et intégrons terme à terme cette série dont le terme général est une somme de polynômes. On reconnaît bien sûr les intégrales du I :

$$\int_0^x f(x-t)\times f(t)\,dt = \sum_{n\geq 0}\sum_{i+q=n} \frac{a_i a_q}{i!\,q!} I_{[i,q]}(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+q=n} a_i a_q\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{A_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ce qu'il fallait démontrer (au changement de notation $q = n+1$ près).

Partie IV

1°) Traitons les deux cas à la fois : on a $a_i = 1$ (resp. $a_i = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq k \\ k! & \text{si } i = k\end{cases}$). On en déduit : $A_q = q$ (resp. $\begin{cases} 0 & \text{pour } q \text{ pair} \\ (k!)^2 & \text{pour } q = 2k+1\end{cases}$). Les séries correspondantes sont respectivement $\displaystyle\sum_{q\geq 1}\frac{1}{(q-1)!}x^q$ et $\displaystyle\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, ce qui correspond bien aux fonctions F du II.

2°) Rappelons que $F(x) = 2\dfrac{\ln(1-x)}{x-2}$. On a supposé que $|x|<1$ et donc on peut écrire :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \qquad\qquad \frac{2}{x-2} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^n}$$

d'où le DSE de F comme produit de deux DSE, ce qui donne le terme général :

$$B_q = \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i.2^{q-i}} \qquad\qquad F(x) = \sum_{n\geq 1} B_q x^q$$

Remarque : cette question est sévère par rapport aux précédentes !
Par ailleurs $a_i = i!$ avec les notations du III, d'où $A_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q}(i-1)!(q-i)! = \sum_{i=1}^{q}\frac{q!}{iC_q^i}$, en louchant sur ce que l'on nous demande. Donc

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2^{q-i}} - \frac{1}{C_q^i}\right) = B_q - \frac{A_q}{q!} = 0(!)$$

par unicité du DSE.
Remarque : le résultat est à rapprocher de $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}(C_q^i - 2^{q-i}) = 0.$

Partie V

1°) La transformation proposée remplace l'équation par une équation équivalente, puisque $x \mapsto e^{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule jamais.

a) Il vient

$$\frac{z''(x)}{2} + x\,z'(x) = e^{-x^2} \qquad (E')$$

b) Par un heureux hasard, on sait résoudre $u' + 2xu = 2e^{-x^2}$: l'équation homogène admet la droite des solutions $u = \lambda e^{-x^2}$, et par variation de la constante (par exemple) on trouve la solution particulière $2xe^{-x^2}$, d'où $(E') \Leftrightarrow z'(x) = (2x+\lambda)e^{-x^2}$.

Notons que $G'(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$; donc la solution générale de (E'), à savoir

$$-e^{-x^2} + \lambda \int_0^x e^{-t^2}\,dt + \mu$$

où λ, μ sont des constantes arbitraires, peut aussi s'écrire

$$-e^{-x^2} + \lambda e^{x^2} G'(x) + \mu$$

Avec les conditions initiales proposées, on doit avoir $\mu = 0$ et (vue l'expression de z') $\lambda = 1$. Il reste $z(x) = -e^{-x^2} + e^{x^2}G'(x)$, d'où $y(x) = G'(x) - e^{-2x^2}$.

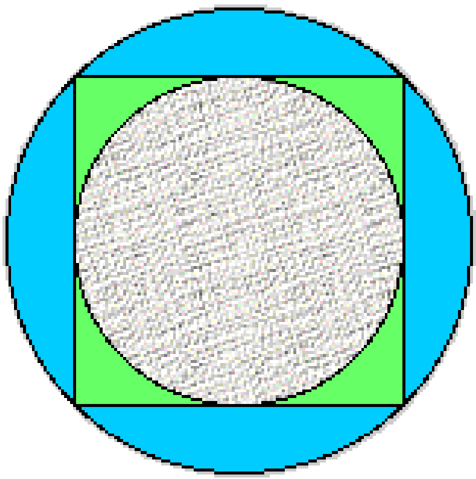
2°) $F(x) = \int_0^x e^{-2t^2}e^{-2(x^2-2tx+t^2)}\,dt = \int_0^x e^{-2(2t^2-2tx+x^2)}\,dt = e^{-x^2}\int_0^x e^{-4t^2+4tx-x^2}\,dt$. Il reste à observer que $-4t^2+4tx-x^2 = -(x-2t)^2$, et à faire le changement de variable $u = x-2t$ pour obtenir

$$\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\int_{-x}^x e^{-u^2}\,du = e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = G'(x) \qquad \text{par symétrie}$$

3°) Un peu bateau, peut-être...

a) Il s'agit simplement de démontrer la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Elle résulte de ce que l'intégrande est continu, et dominé en $+\infty$ par (par exemple) $t \mapsto 1/t^2$ car on sait que $t^2e^{-t^2} \to 0$ (critère du t^2).

b) On représente les disques inscrits et circonscrits au carré :



La forme du domaine, comme celle de l'intégrande, imposent le passage en coordonnées polaires :

$$I_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \pi(1-e^{-a^2}) \qquad \text{en intégrant par rapport à chaque variable séparément.}$$

De même, on trouve $I_3 = \pi(1-e^{-2a^2})$.

Remarquons que $I_1 \le I_2 \le I_3$ puisque l'intégrande est positif, et que $D_1 \subset D_2 \subset D_3$.

Par le lemme des gendarmes, comme I_1 et I_3 tendent vers π, I_2 ne peut qu'elle ne converge aussi vers π quand $a \to +\infty$.

Or, par le théorème de Fubini (concernant l' intégrale d'une fonction continue de deux variables sur le produit de deux segments) on a $I_2 = \left(\int_{-a}^a e^{-t^2}\,dt\right)^2$. Moralité :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{8}$$