DM n° 5 : Conjugaison par rapport à une quadrique

Ce problème est assez difficile, car il requiert une grande rigueur dans les raisonnements, et un esprit mobile, donc bien façonné par le cours.

Première partie

1. Un point M appartient au cône s'il est en Ω ou bien si la droite (ΩM) rencontre $\mathcal{C}$.

   $$M \in \mathcal{Q} - \{\Omega\} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \Omega + \lambda \Omega M \in \mathcal{C} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \begin{cases} \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x^2 = 2\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ x^2 = 2yz \end{cases}.$$

   L'équation du cône complet n'est pas tout à fait $x^2 = 2yz$: si on retire l'hypothèse $z \neq 0$, on ajoute non pas seulement le sommet, mais toute la droite (Oy). Celle-ci n'appartient bien sûr pas au cône, mais ça a l'air de convenir pour la suite du problème. Donc nous adopterons dans la suite du problème $q(x, y, z) = x^2 - 2yz$.

2. La matrice de la forme quadratique q dans la base $(\imath, \jmath, k)$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On en déduit l'expression de φ : $\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 - y_1z_2 - y_2z_1$.

3. Notons $\operatorname{Conj} \mathcal{E}$ le conjugué d'un ensemble E.

   (a) $M \in \operatorname{Conj}\{M_1\} \iff \varphi(\Omega M, \Omega M_1) = 0 \iff xx_1 - yz_1 - zy_1 = 0$. Le conjugué du singleton $\{M_1\}$ est donc le plan d'équation $xx_1 - yz_1 - zy_1 = 0$.
   $M \in \operatorname{Conj} \mathcal{D}_1 \iff \forall N \in \mathcal{D}_1,\ \varphi(\Omega M, \Omega N) = 0 \iff \forall \lambda \neq 0,\ \varphi(\Omega M, \Omega O) + \lambda \varphi(\Omega M, OM_1) = 0$
   Ceci est un polynôme du premier degré au plus en λ, admettant une infinité de racines réelles, c'est donc le polynôme nul. Ainsi :

   $$M \in \operatorname{Conj} \mathcal{D}_1 \iff \begin{cases} y = 0 \\ xx_1 - y(z_1 - 1) - zy_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ xx_1 - zy_1 = 0 \end{cases}$$

   Le conjugué de $\mathcal{D}_1$ est donc la droite d'équation $\begin{cases} y = 0 \\ xx_1 - zy_1 = 0 \end{cases}$.

   (b) $M \in \operatorname{Conj} \mathcal{P}_1 \iff \forall P \in \mathcal{P}_1,\ \varphi(\Omega M, \Omega P) = 0 \iff \forall (x', y', z'),\ (\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0 \Longrightarrow xx' - yz' - zy' = 0)$.
   Les deux formes linéaires $(x', y', z') \mapsto \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$ et $(x', y', z') \mapsto xx' - yz' - zy'$ sont donc colinéaires, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \lambda\alpha \\ y = -\lambda\beta \\ z = -\lambda\gamma \end{cases}$.
   Le conjugué de $\mathcal{P}_1$ est donc la droite pointée (OM_2), avec M_2 de coordonnées $(\alpha, -\beta, -\gamma)$.

4. (a) Soit $M_1(x_1, y_1, 1)$ un point de $\mathcal{P}$. $M(x, y, z)$ appartient au conjugué de $\{M_1\}$ par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si $M \in \operatorname{Conj} \mathcal{C} \cap \mathcal{P}$, soit si et seulement si $\begin{cases} z = 1 \\ xx_1 - y - y_1 = 0 \end{cases}$.
   Le conjugué de $M_1(x_1, y_1, 1)$ par rapport à $\mathcal{C}$ est donc la droite de $\mathcal{P}$ d'équation $xx_1 - y - y_1 = 0$.

   (b) $M(x, y, z)$ appartient au conjugué de $\mathcal{D}_1$ par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si M est conjugué de tous les points de $\mathcal{D}_1$, soit si $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0$ entraîne $xx_1 - y - y_1 = 0$.
   Ceci se traduit par le fait que les deux formes linéaires $(x_1, y_1) \mapsto \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma$ et $(x_1, y_1) \mapsto xx_1 - y - y_1$ sont proportionnelles, i.e. $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \lambda\alpha \\ -1 = \lambda\beta \\ -y = \lambda\gamma \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = -\dfrac{\alpha}{\beta} \\ y = \dfrac{\gamma}{\beta} \end{cases}$ si $\beta \neq 0$.
   Dans le cas où $\beta = 0$, le conjugué est vide.
   Donc le conjugué de $\mathcal{D}_1 : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ par rapport à $\mathcal{C}$ est le singleton composé de l'unique point $M\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ si $\beta \neq 0$, et $\emptyset$ sinon.

Deuxième partie

1. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées des points de contact T_1 et T_2 des tangentes issues de M_0. Ces tangentes ont pour équation $y = \dfrac{x_i^2}{2} + x_i (x - x_i)$. M_0 appartient à ces droites si et seulement si $y_0 = \dfrac{x_i^2}{2} + x_i (x_0 - x_i)$, soit $x_i^2 - 2x_0 x_i + 2y_0 = 0$. Cette équation du second degré en x_i a pour discriminant réduit $x_0^2 - 2y_0$, il est donc strictement positif lorsque $M \in \mathcal{P}_e$. Le calcul confirme donc l'intuition de la figure : on ne peut mener deux tangentes à $\mathcal{C}$ que d'un point se trouvant dans $\mathcal{P}_e$.

   $M(x, y) \in (T_1, T_2) \iff \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$

   Constatons que $y_2 - y_1 = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = x_0 (x_2 - x_1)$, que $x_1 + x_2 = 2x_0$ et que $x_2 y_1 - x_1 y_2 = -(x_2 - x_1)\dfrac{x_1 x_2}{2} = -y_0 (x_2 - x_1)$ (voir les coefficients du polynôme dont x_1 et x_2 sont les racines). On peut sans grand danger diviser par $x_2 - x_1$ (cette quantité ne peut s'annuler que si M_0 se trouve *sur* $\mathcal{C}$).

   L'équation de la droite $(T_1 T_2)$ est donc : $x_0 x - y - y_0 = 0$. On remarque que c'est exactement l'équation de la droite conjuguée de M_0 par rapport à $\mathcal{C}$.

2. La droite $\mathcal{D}_{0,\mu}$ a pour équation $y = y_0 + \mu (x - x_0)$. Elle coupe $\mathcal{C}$ en deux points I_1 et I_2 dont les abscisses sont les racines de l'équation $\dfrac{x^2}{2} - \mu x - y_0 + \mu x_0 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré en x est $\mu^2 - 2\mu x_0 + y_0 = (\mu - x_0)^2 + \left(2y_0 - x_0^2\right)$, somme de deux nombres positifs.

   Soient x_1 et x_2 les racines (distinctes) de cette équation. La tangente à $\mathcal{C}$ en I_i a pour équation $y = \dfrac{x_i^2}{2} + x_i (x - x_i)$. Les deux tangentes se coupent en un point J d'abscisse vérifiant $x_1 x - \dfrac{x_1^2}{2} = x_2 x - \dfrac{x_2^2}{2}$, soit $x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = \mu$.

   L'ordonnée de J est alors $y = x_1 \mu - \dfrac{x_1^2}{2} = \mu x_0 - y_0$.

   Le lieu des points J lorsque μ parcourt $\mathbb{R}$ est donc la droite d'équation $y = x x_0 - y_0$. C'est la droite conjuguée du point M_0 par rapport à $\mathcal{C}$.

Troisième partie

1. $P(m)$ est la droite d'équation $Xx - Y - y = 0$. Donc $p(P(M))$ est le point $\left(-\dfrac{x}{-1}, \dfrac{-y}{-1}\right)$, c'est le point m.

   De même, $p(\mathcal{D})$ est le point $\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$, $P(p(\mathcal{D}))$ est donc la droite d'équation $-\dfrac{\alpha}{\beta} X - Y - \dfrac{\gamma}{\beta} = 0$, c'est bien la droite $\mathcal{D}$.

   L'application p est donc une bijection de $\mathcal{P}$ dans l'ensemble des droites non verticales de $\mathcal{P}$, de bijection réciproque P.

2. Déterminons Γ : la tangente T_m en un point $m(x, y(x))$ de γ a pour équation $Y = y(x) + y'(x)(X - x)$. $p(T_m)$ est donc le point $M(y'(x), xy'(x) - y(x))$.

   Donc une représentation paramétrique de Γ est : $\begin{cases} X = y'(x) \\ Y = xy'(x) - y(x) \end{cases}$.

   La polaire $P(m)$ en le point $m(x, y(x))$ a pour équation $Xx - Y - y(x) = 0$. Les coordonnées (X, Y) du point caractéristique de l'enveloppe sont solutions du système : $\begin{cases} Xx - Y - y(x) = 0 \\ X - y'(x) = 0 \end{cases}$.

   La courbe Γ' a donc pour représentation paramétrique : $\Gamma' : \begin{cases} X = y'(x) \\ Y = xy'(x) - y(x) \end{cases}$. Les courbes Γ et Γ' sont donc égales.

3. L'application P transforme un point $m \in \gamma$ en une droite $P(m)$ qui est tangente à Γ, en un point M de Γ transformé par p de la tangente T_m à γ en m.

   Ainsi l'application $(m, T_m) \mapsto (p(T_m), P(m))$ est une bijection de l'ensemble des éléments de contacts relatifs à γ dans l'ensemble des éléments de contacts relatifs à Γ.

   Il est alors évident que $\mathcal{T}$ est une bijection de bijection réciproque $\mathcal{T}$.

Quatrième partie

1. Les coordonnées (X,Y) du point générique de $\mathcal{T}(\gamma)$ sont : $\left\{\begin{array}{l} X = y'(x) \\ Y = xy'(x) - y(x) \end{array}\right.$. Mais $\mathcal{T}$ est une involution, donc on a de même $\left\{\begin{array}{l} x = Y'(X) \\ y = XY'(X) - Y(X) \end{array}\right.$ (attention : les dérivées de y le sont par rapport à x, celles de Y par rapport à X). On peut d'ailleurs retrouver directement ces relations.

   Enfin $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X} = Y''(X)$, et donc $y''(x) = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{Y''}$.

   Ainsi Γ est courbe intégrale de l'équation (E') : $f\left(Y', XY' - Y, X, \dfrac{1}{Y''}\right) = 0$.

2. (a) Il suffit de faire la substitution : $(E') : 2X^2Y - \dfrac{1}{Y''}\left(1 + (XY' - Y)^2\right) = 0$.

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = XY''$, et $\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = \dfrac{Y'}{XY''}$.

   Multiplions alors (E') par $\dfrac{Y'}{X}$: $2XYY' - \dfrac{Y'}{XY''}\left(1 + (XY' - Y)^2\right) = 0$.

   Enfin, $XY' = u + Y$. L'équation différentielle vérifiée par Z est donc : $2Z(u+Z) = \left(1+u^2\right)\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u}$.

   Calculons habilement : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{1+u^2}{Z}\right) = \dfrac{2uZ - \left(1+u^2\right)Z'}{Z^2}$. En substituant dans notre équation, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{1+u^2}{Z}\right) = -2$.

   Cette équation s'intègre aisément : $\dfrac{1+u^2}{Z} = -2(u - C)$, C étant une constante réelle. Ainsi, les fonctions solutions sont les $Z : u \mapsto \dfrac{1+u^2}{2(C-u)}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Ceci nous permet d'obtenir Y en fonction de u. Trouvant X en fonction de u, nous obtiendrons alors une représentation paramétrique de Γ.

   Or $u = XY' - Y = XZ'\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} - Z$, donc $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u}(u+Z) = XZ'$. Enfin, $\dfrac{u+Z}{Z'} = \dfrac{1+u^2}{2Z} = -(u-C)$. X est donc solution de l'équation $(u-C)\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} + X = 0$.

   Les solutions de cette équation sont les $X : u \mapsto \dfrac{k}{C-u}$.

3. $Y = \dfrac{1+u^2}{2(C-u)} = \dfrac{2X}{k}\dfrac{(CX-k)^2 + X^2}{X^2}$, donc $XY = \dfrac{2}{k}\left(X^2\left(1+C^2\right) - 2CkX + k^2\right)$. C'est l'équation d'une conique. On peut chercher un repère dans lequel la forme quadratique associée est diagonale, mais ici on peut plus simplement étudier la fonction $X \mapsto \dfrac{2}{kX}\left(X^2\left(1+C^2\right) - 2CkX + k^2\right)$.

   Il y a une asymptote verticale d'équation $X = 0$. En écrivant $Y = \dfrac{2}{k}\left(X\left(1+C^2\right) - 2Ck + \dfrac{k^2}{X}\right)$, on "lit" l'équation de la deuxième asymptote : $Y = \dfrac{2\left(1+C^2\right)}{k}X - 4C$.

   Nous sommes donc en présence d'un arc d'hyperbole, dont les asymptotes se coupent en $\Pi(0,-4C)$ qui est centre de symétrie de la courbe.

4. Pour terminer, utilisons les relations de la troisième partie pour obtenir x et y, en fonction de X :

   $x = Y' = \dfrac{2\left(C^2+1\right)}{k} - \dfrac{2k}{X^2}$, et $y = XY' - Y = 4\left(C - \dfrac{k}{X}\right)$.

   Ainsi, $\dfrac{2\left(C^2+1\right)}{k} - x = \dfrac{2k}{X^2} = \dfrac{2}{k}(4C - Y)^2$.

   Il s'agit d'une parabole de direction asymptotique Ox.