Première épreuve

CORRIGÉ

I-1°.a. La fonction numérique $x \mapsto \frac{[x]}{x^{k+1}}$ est définie sur la demi-droite $[0, \infty[$, continue par morceaux et positive ; elle vérifie l'encadrement :

$$\frac{x-1}{x^{k+1}} < \frac{[x]}{x^{k+1}} \leq \frac{1}{x^k} .$$

Les intégrales impropres S_k et T_k sont convergentes lorsque $k \geq 2$ et divergentes pour $k=0$ et $k=1$.

b. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{[x]}{x^{k+1}}$ est positive, la série de terme général $f_n(k)$, $n \geq 1$, est convergente et de somme S_k. Or :

$$f_n(k) = \int_n^{n+1} \varphi_k(x)\,dx = n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{k+1}} = -n \left[\frac{1}{k\, x^k} \right]_{x=n}^{x=n+1} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{n}{(n+1)^k} \right) .$$

$$f_n(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)^k} \right) .$$

Par suite :

$$f_N(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{N^{k-1}} - \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \frac{1}{(N+1)^k} \right) .$$

$$f_{N-1}(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{(N-1)^{k-1}} - \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k} \right) .$$

$$\ldots$$

$$f_2(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{3^k} \right) .$$

$$f_1(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \right) .$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(k) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^k} \right) .$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(k) = \frac{1}{k}\left(1 + \zeta(k) - 1 \right) = \frac{\zeta(k)}{k} .$$

Par suite : $\boxed{S_k = \frac{\zeta(k)}{k}}$

I-2°.a. Par définition : $T_k = \int_2^{\infty} \varphi_k(x)\,dx$; il vient : $|T_k| \le \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^k} \le \frac{1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}$.

La série de terme général $(-1)^k T_k$, $k \ge 2$, est donc absolument convergente.

I-2°.b. *Deux méthodes* :

i) Par définition, le réel S_k est strictement positif ; la série de terme général $(-1)^k S_k$ est alternée. La suite de terme général S_k, $k \ge 2$, est monotone décroissante puisque :

$$S_k - S_{k-1} = \int_1^{\infty} [x]\left(\frac{1}{x^{k+1}} \pm \frac{1}{x^k}\right) dx \le 0 .$$

Le terme général de la série alternée tend vers 0 car : pour $k \ge 2$:

$$S_k = \int_1^{\infty} \varphi_k(x)\,dx \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \frac{1}{k-1} .$$

Par suite la série alternée $(-1)^k S_k$ est donc convergente.

ii) Il vient : $S_k = T_k + \int_1^2 \varphi_k(x)\,dx = T_k + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

La série de terme général $(-1)^k S_k$ est donc la somme de trois séries :

- $(-1)^k T_k$ est le terme général d'une série absolument convergente ;
- $(-1)^k \frac{1}{k\,2^k}$ est le terme général d'une série absolument convergente ;
- $\frac{(-1)^k}{k}$ est le terme général d'une série alternée convergente .

I-2°.c. Remarquons la relation :

$$S_k = T_k + \int_1^2 \varphi_k(x)\,dx .$$

Par suite :

$$S = T + \sum_{k=2}^{\infty} (\pm 1)^k \int_1^2 \varphi_k(x)\,dx .$$

Or : $\int_1^2 \varphi_k(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^{k+1}}\,dx = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Donc : $S = T + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k\,2^k} = T + (1 - \ln 2) - \left(\frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right)$.

$$\boxed{S = T + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

I-3°. La fonction φ, continue par morceaux sur la demi-droite [2, ∞[, décroît à l'infini au moins comme $\frac{1}{x^2}$. L'intégrale est donc convergente.

Considérons la somme T^n des n premiers termes de la série de terme général $(-1)^k T_k$:

$$T^n = \sum_{k=2}^{n} (\pm 1)^k \int_2^{\infty} \varphi_k(x)\, dx \ .$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$T^n = \int_2^{\infty} \sum_{k=2}^{n} (\pm 1)^k \ \varphi_k(x)\, dx.$$

Or :

$$\sum_{k=2}^{n} (\pm 1)^k \ \varphi_k(x) = [x] \sum_{k=2}^{n} \frac{(\pm 1)^k}{x^{k+1}} = \frac{[x]}{x^3} \frac{1+(-1)^{n-1}/x^{n-1}}{1 \ + \ 1/x} \ = \varphi(x)\ (1 + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}} \ )$$

Par suite :

$$T^n = \int_2^{\infty} \varphi(x)\, dx \ + (-1)^{n-1} \int_2^{\infty} \frac{[x]}{x^{n+1}\ (1+x)} dx \ .$$

Donc :

$$|T^n - \int_2^{\infty} \varphi(x)\, dx| \ \le \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx \ = \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} \ .$$

Par conséquent :

$$\boxed{T \ = \int_2^{\infty} \varphi(x)\, dx}$$

I.4°.a. Recherchons l'infiniment petit équivalent à h_n lorsque l'entier n croît indéfiniment :

$$h_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \ \doteq \ \frac{1}{2\ n^2} \ .$$

La série de terme général h_n est donc convergente.

I.4°.b. D'après les résultats établis aux questions I-2°.c. et I-3°, il vient :

$$S = \ \frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{4}) + \int_2^{\infty} \varphi(x)\, dx \ .$$

Remarquons la relation :

$$\int_2^{\infty} \varphi(x)\, dx \ = \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \varphi(x)\, dx \ = \sum_{n=2}^{\infty} n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2\ (1+x)}.$$

Or :

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2\ (1+x)} = [-\frac{1}{x} + \ln\frac{1+x}{x}]_{x=n}^{x=n+1} \ = h_n - h_{n+1} \ .$$

Par suite :

$$\int_2^{\infty} \varphi(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(h_n - h_{n+1}\right) .$$

Calculons la somme des N –1 premiers termes de cette série :

$2\left(h_2 - h_3\right)$,
$3\left(h_3 - h_4\right)$,
…
$(N-1)\left(h_{N-1} - h_N\right)$,
$N\left(h_N - h_{N+1}\right)$,

Donc :

$$\sum_{n=2}^{N} n\left(h_n - h_{n+1}\right) = 2\,h_2 + \sum_{n=3}^{N} h_n - N\,h_{N+1} .$$

De manière évidente la suite n h(n+1), $n \geq 1$, tend vers 0 ; donc :

$$S = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + h_2 - h_1 + H .$$

Donc :

$$\boxed{S = H}$$

I.4°.c. Remarquons : $\quad c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Par suite : $\quad h_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} + c_{n+1} - c_n$.

Calculons la somme des N premiers termes de la série de terme général h_n , $n \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{N} h_n = 1 - \frac{1}{N+1} + c_{N+1} - c_1 .$$

Par suite :

$$\boxed{H = \gamma\ .}$$

Or S = H ; donc :

$$\boxed{S = \gamma}$$

Par définition de S : $\quad S = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (\pm 1)^k\ S_k = \sum_{k=2}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$.

Nous reconnaissons l'expression de F(1) définie dans le préambule ; donc :

$$\boxed{F(1) = \gamma}$$

Deuxième partie.

II-1°.a. Le critère de d'Alembert conduit à considérer l'expression :

$$\left|\frac{u_{n,k+1}}{u_{n,k}}\right| = \frac{k}{k+1}\,\frac{|x|}{n} .$$

Par suite : $$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{n,k+1}}{u_{n,k}}\right| = \frac{|x|}{n} .$$

Le rayon de convergence R_n de la série de terme général $u_{n,k}$, $k \geq 2$, est donc égal à n. La série est convergente pour x = n et divergente pour x = –n.

II-1°.b. La série de terme général $u_{n,k}$, $k \geq 2$, est convergente pour $x \in J_n =]-n\ ,\ n]$. Pour $x \in]-n\ ,\ n[$, il vient :

$$U_n(x) = \frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n}) .$$

Lorsque le réel x est égal à l'entier n, le résultat admis à la question I-2°.c, justifie le résultat ci-dessus. Il vient : $U_n(1) = h_n$.

II-1°.c. Tout réel x appartient à partir du rang N = [|x|] à l'intervalle J_N et, a fortiori, à tout intervalle J_n lorsque n ≥ N. Le réel $U_n(x)$ est donc défini pour n ≥ N. Il vient :

$$U_n(x) \sim \frac{x^2}{2\,n^2} .$$

II-2°.a. L'inégalité $\zeta(x) > 1$ est manifeste. Majorons la somme de la série par une intégrale :

$$\zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = 1 + \frac{1}{x \pm 1} .$$

II-2°.b. La fonction $x \mapsto \zeta(x)$ est décroissante. Par suite : $\forall\ k \geq 2$, $\zeta(2) \geq \zeta(k) \geq \zeta(k+1) \geq 1$.

Par suite :

$$\frac{|x|^k}{k} \leq \left|\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k\right| \leq \frac{\zeta(2)}{k}\,|x|^k .$$

Le rayon de convergence est égal à 1.

Pour x = –1, le terme général de la série est : $\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k) = (-1)^k\,S(k)$.

C'est le terme général d'une série convergente (I-2.b).

Pour x = 1 , le terme général de la série est : $\frac{1}{k}\,\zeta(k)$. Or : $\frac{1}{k}\,\zeta(k) \geq \frac{1}{k}$. La série est donc divergente.

La fonction F, somme de la série entière de terme général $\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k$, $k \geq 2$, est donc définie sur l'intervalle I =]–1, 1].

II-3°.a. D'après la question II-1°.b la fonction U_n est définie par la relation :

$$U_n(x) = \frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n}) .$$

Recherchons les variations de la restriction de la fonction U_n à l'intervalle [–A, 1] ; sa dérivée U'_n vaut :

$$U'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n+x} .$$

Par suite :

x	$-A$		0		1
U'_n		$-$	0	$+$	
U_n	$U_n(-A)$	↘	0	↗	$U_n(1)$

Il vient :

$$\forall\ x \in [-A, 1] , |U_n(x)| \leq \max\big(U_n(-A) , U_n(1)\big) .$$

La série de fonctions U_n, $n\geq 1$, converge donc normalement sur l'intervalle [–A, 1] ; il y a par suite convergence uniforme.

II-3°.b. Considérons, pour un entier N quelconque donné, la différence :

$$F(x) - \sum_{n=1}^{N} U_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k}\zeta(k)\, x^k - \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k .$$

Dans le second membre nous reconnaissons la somme des sommes de N séries convergentes ; par suite :

$$F(x) - \sum_{n=1}^{N} U_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k x^k}{k}\Big(\zeta(k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k}\Big) .$$

Remarquons maintenant : $\displaystyle \zeta(k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Exploitons la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ et supposons $|x| < 1$; il vient :

$$|\zeta(k) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k}| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Donc : $\displaystyle |F(x) - \sum_{n=1}^{N} U_n(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} \leq \frac{|x|^2}{1 - |x|} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

Pour tout réel x vérifiant $|x| < 1$, la fonction F est la somme de la série de terme général U_n, $n \geq 1$:

$$\forall\ x , |x| < 1 , F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) .$$

Supposons x = 1 ; par définition :

$$F(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k} \zeta(k) = \sum_{k=2}^{\infty} (\pm 1)^k \; S(k) = S \, .$$

d'après la question II-1.b, il vient : $U_n(1) = h_n$. Par suite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = H \, .$$

Donc :

$$F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1).$$

Puisque la série de fonctions U_n, $n \geq 1$, converge uniformément sur tout intervalle $[-A, 1]$ $(0<A<1)$ la somme F est une fonction continue sur l'intervalle I.

II-4°. i/ <u>x = 1</u>.Il vient : $G_n(1) = \dfrac{n! \; n}{2.3.\ldots.(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$. Donc : $\lim\limits_{n \to \infty} \ln\big(G_n(1)\big) = 0$. La relation est vérifiée.

ii/ <u>–1 < x < 1</u>. D'après la question II-3°.b : $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Considérons l'expression :

$$D_n(x) = \ln(G_n(x)) \, .$$

$$D_n(x) = x \ln(n) + \sum_{p=1}^{n} \ln(p) - \sum_{p=1}^{n} \ln(p + x).$$

Par suite :

$$D_n(x) = x \ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{p}).$$

$$D_n(x) = x \left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) - \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{x}{p} - \ln(1 + \frac{x}{p}) \right).$$

Donc :

$$D_n(x) = x \left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) + \sum_{p=1}^{n} U_n(x).$$

La limite de $D_n(x)$, lorsque n croît indéfiniment est $F(x) - \gamma x$. La suite des fonctions $\ln\big(G_n(x)\big)$, $n \geq 1$, est donc convergente. La suite de fonctions $G_n(x)$, $n \geq 1$, est elle-aussi convergente. La fonction limite G est continue car elle est égale à la fonction :

$$x \mapsto \exp\big(F(x) - \gamma x\big) \, .$$

Troisième partie.

III-1°.a. Pour tout x donné ($\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$), la fonction $t \mapsto f(t)$ est paire, continue et continûment dérivable par morceaux. Les coefficients b_n, $n \geq 1$, sont nuls. Calculons les coefficients a_n, $n \geq 0$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pm\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\, t)\, dt = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pm\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\, t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\, t) \cos(n\, t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \cos\big((x+n)t\big)\, dt + \int_0^{\pi} \cos\big((x \pm n)t\big)\, dt \right\} = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\, x}{x^2 - n^2} .$$

Il y a convergence uniforme de la série de Fourier :

$$f(t) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \cos(n\, t)}{x^2 \pm n^2} .$$

III-1°.b. La convergence de la série de terme général $v_n(x)$ tient à l'équivalence : $v_n(x) \sim -\dfrac{2x}{n^2}$.

Donnons à t la valeur π ; il vient :

$$\cos(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 \pm n^2} .$$

Par suite :

$$\boxed{\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, x}{x^2 \pm n^2} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.}$$

III-2°.a. Si $x \in K_a$, il vient : $|v_n(x)| \leq \dfrac{2\, a}{n^2 - a^2}$. Il y a donc convergence uniforme sur l'intervalle K_a.

Soient α et a deux réels tels que : $0 < \alpha < a < 1$. Il vient :

$$\int_{\alpha}^{a} \left(\frac{\pi \cos(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\ln \frac{\sin(\pi\, x)}{x} \right]_{x=\alpha}^{x=a} = \ln \frac{\sin(\pi\, a)}{a} - \ln \frac{\sin(\pi\, \alpha)}{\alpha} .$$

La fonction $x \mapsto \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \dfrac{1}{x}$ se prolonge en 0 par continuité. En effet :

$$\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} = \frac{\pi\, x \cos(\pi\, x) - \sin(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)} \sim \frac{(\pi\, x)^2}{2} .$$

Donc :

$$\int_0^{a} \left(\frac{\pi \cos(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln \frac{\sin(\pi\, a)}{\pi\, a} .$$

La convergence uniforme sur l'intervalle K_a permet d'écrire :

$$\int_0^a \left(\frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a v_n(x)\, dx \ .$$

Donc :

$$\ln \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\ln(x^2 \pm n^2)\Big]_{x=0}^{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 \pm \frac{a^2}{n^2}).$$

III-2°.b. Par définition de la fonction G_n, il vient :

$$\ln\big(G_n(x)\big) = x \ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{p}).$$

Remarquons maintenant :

$$G_n(1-x) = \frac{n!\, n^{1\pm x}}{(\pm x + 2)(\pm x + 3)\ldots(\pm x + n + 1)}.$$

Par suite :

$$\ln\big(G_n(1-x)\big) = (1-x) \ln(n) - \ln(n+1) - \sum_{p=2}^{n+1} \ln(1 \pm \frac{x}{p}).$$

Il vient :

$$\ln\big(G_n(x)\big) + \ln\big(G_n(1-x)\big) = \ln\frac{n}{n+1} - \sum_{p=1}^{n} \ln(1 \pm \frac{x^2}{p^2}) + \ln(1- x) + \ln(1-\frac{x}{n+1}) \ .$$

Faisons tendre n vers l'infini :

$$\ln\big(G(x)\big) + \ln\big(G(1-x)\big) = -\sum_{p=1}^{n} \ln(1 \pm \frac{x^2}{p^2}) + \ln(1- x) \ .$$

D'après la question précédente, il vient :

$$\ln\big(G(x)\big) + \ln\big(G(1-x)\big) = -\ln\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Big) + \ln(1- x) \ .$$

Donc :

$$\boxed{G(x)\ G(1-x)\ \sin(\pi x) = \pi\ x\ (1 - x)}$$

III-2°.c. Il vient : $G(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{4}$. Donc : $G(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par suite :

$$\boxed{F(\frac{1}{2}) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\ln\pi}{2} - \ln 2\ .}$$

FIN