ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

L'objet de ce problème est de montrer qu'il existe, pour tout entier n strictement positif, deux suites de réels a_i, $0 \le i \le n$, et α_i, $0 \le i \le n$, tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2n+1, l'égalité

(E)
$$\int_{\pm 1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 P(\alpha_i).$$

ait lieu. Cette propriété suggère que, si f est une fonction (2n+2)-fois continûment dérivable sur l'intervalle [–1, 1], le réel $I_n(f)$ défini par la relation $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 f(\alpha_i)$ soit une valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [–1, 1].

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels. À tout couple (P, Q) de polynômes appartenant à E, associons le réel (P | Q) défini par la relation :

$$(P \mid Q) = \int_{\pm 1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt.$$

Il est admis que l'application $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ de E×E dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Soit Φ l'application de E×E dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\Phi(P, Q) = (X.P \mid Q) = \int_{\pm 1}^{1} t\,P(t)\,Q(t)\,dt.$$

Il est admis que l'application Φ (de E×E dans $\mathbb{R}$) est une forme bilinéaire symétrique.

Dans toute la suite, la lettre n désigne un entier strictement positif et E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Il est admis que l'application $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire et qu'il existe un endomorphisme φ_n de E_n qui, à tout polynôme Q appartenant à E_n, fait correspondre le polynôme $\varphi_n(Q)$ de E_n vérifiant la relation :

pour tout polynôme P de E_n, $\big(P \mid \varphi_n(Q)\big) = \Phi(P, Q)$.

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT.

1°) Existence d'une base orthonormée de E_n (|) associée à la forme Φ :

a. Vérifier que l'endomorphisme φ_n de l'espace euclidien $(E_n, (\ |\ ))$ est symétrique.

b. Exemple : Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 2, l'endomorphisme φ_2 en recherchant les images des polynômes 1, X et X^2 ; en déduire la matrice associée à l'endomorphisme φ_2 dans la base des polynômes 1, X et X^2. Quelles sont les valeurs propres de cet endomorphisme ?

c. Démontrer l'existence d'une base orthonormée de polynômes e_i, $0 \leq i \leq n$, appartenant à l'espace euclidien $(E_n, (\ |\ ))$ et d'une suite de réels α_i, $0 \leq i \leq n$, tels que, pour tout couple (P, Q) de polynômes appartenant à E_n, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\Phi(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \ (e_i \mid P)\ (e_i \mid Q)\ .$$

La base orthonormée $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ de $(E_n, (\ |\ ))$ est dite associée à la forme bilinéaire Φ.

d. Démontrer que les réels α_i, pour tout entier i compris entre 0 et n ($0 \leq i \leq n$), ont une valeur absolue strictement inférieure à 1 : $|\alpha_i| < 1$.

e. Exemple : dans cette question l'entier n est égal à 1 ; déterminer une base (e_0, e_1) orthonormée de l'espace euclidien $(E_1, (\ |\ ))$ et deux scalaires α_0 et α_1 satisfaisant aux conditions de la question 1°.c ; on pourra d'abord déterminer une base orthonormée constituée de polynômes S_0 et S_1.

2°) Détermination d'une base orthonormée de E_n associée à la forme Φ :

L'espace euclidien $(E_n, (\ |\ ))$ est supposé muni d'une base orthonormée $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ associée à la forme Φ. L'existence en a été démontrée ci-dessus. Désignons par a_i le produit scalaire du polynôme constant égal à 1 avec le polynôme e_i : $a_i = (1 \mid e_i)$.

a. Démontrer la propriété : pour tout entier k, compris entre 1 et n ($1\leq k\leq n$) et tout entier i compris entre 0 et n ($0\leq i\leq n$) : $(X^k \mid e_i) = (\alpha_i)^k\, a_i$.
En déduire, pour tout polynôme P de E_n et tout entier i compris entre 0 et n ($0\leq i\leq n$), l'expression du produit scalaire $(e_i \mid P)$ en fonction des réels a_i et $P(\alpha_i)$.

b. Démontrer que pour tout entier i ($0\leq i\leq n$) le produit des réels a_i et $e_i(\alpha_i)$ est différent de 0 $(a_i.e_i(\alpha_i) \neq 0)$. En déduire que les réels a_i, $0\leq i\leq n$, sont tous différents de 0.

Supposons que les réels α_i, $0\leq i\leq n$, soient indexés de façon telle que les p premiers ($0\leq p\leq n$) soient deux à deux distincts et que tout réel α_j de rang j supérieur strictement à p soit égal à un α_i de rang inférieur ou égal à p ($i\leq p$). Soit R_n le polynôme défini par la relation :

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^{p} (x \pm \alpha_i).$$

c. Démontrer, en considérant les produits scalaires $(e_i \mid R_n)$, que les réels α_i, $0 \leq i \leq n$, sont deux à deux distincts et que le degré du polynôme R_n est $n+1$.

Soit j un entier compris entre 0 et n $(0 \leq j \leq n)$; désignons par L_j le polynôme défini par la relation :

$$L_j(x) = \prod_{k \neq j, 0 \leq k \leq n} (x \pm \alpha_k).$$

d. Démontrer que chaque polynôme L_j est proportionnel au polynôme e_j. Soit k_j la constante de proportionnalité : $e_j = k_j\, L_j$. Démontrer les deux relations :

$$k_j\, a_j\, L_j(\alpha_j) = 1 \;\; ; \;\; (a_j)^2 = \frac{(1 \mid L_j)}{L_j(\alpha_j)} \; .$$

En déduire les différentes bases orthonormées de E_n associées à la forme bilinéaire Φ.

3°) <u>Validité de l'égalité **(E)**</u> :

Les réels a_i, $0 \leq i \leq n$, et α_i, $0 \leq i \leq n$, sont ceux qui ont été définis précédemment.

a. Démontrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2n + 1, l'égalité

(E) $$\int_{\pm 1}^{1} P(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2\, P(\alpha_i)$$

est vraie. Une méthode consiste à établir d'abord cette relation pour le polynôme constant égal à 1, puis pour les monômes X^k, $1 \leq k \leq 2n+1$, et enfin pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 2n+1.

b. Démontrer que cette relation **(E)** est fausse pour tout polynôme de degré 2n + 2.

4°) <u>Détermination du polynôme R_n</u> :

Désignons toujours par R_n le polynôme défini par la relation : $R_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x \pm \alpha_i)$.

a. Soit P un polynôme appartenant à E_n ; calculer le produit scalaire des polynômes P et R_n dans $\big(E, (\;|\;)\big)$.

b. Soit U_n un polynôme de degré n+1 dont le terme de plus haut degré est X^{n+1}. Supposons qu'il soit orthogonal dans $\big(E, (\;|\;)\big)$ à tous les polynômes P du sous-espace vectoriel E_n. Démontrer que ce polynôme U_n est le polynôme R_n. En déduire une caractérisation simple du polynôme R_n et une méthode directe de détermination du polynôme R_n (qui évite de rechercher les réels α_i, $0 \leq i \leq n$).

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT.

c. Établir une relation simple entre les polynômes $R_n(X)$ et $R_n(-X)$.

d. Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 2, le polynôme R_2 puis les réels α_i, $0 \leq i \leq 2$; $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$. En déduire ensuite les polynômes L_i, $0 \leq i \leq 2$, puis les réels $(a_i)^2$, $0 \leq i \leq 2$.

Soit f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$; étant donné un entier n $(n \geq 1)$, désignons par $I_n(f)$ l'expression ci-dessous :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 \, f(\alpha_i) .$$

Il est admis que, si la fonction f est (2n+2)-fois continûment dérivable, l'erreur commise en remplaçant la valeur de l'intégrale par $I_n(f)$ peut être évaluée par la relation :

$$\left| \int_{\pm 1}^{1} f(t)\, dt - I_n(f) \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \sup_{\pm 1 \leq x \leq 1} |f^{(2n+2)}(x)| \, \|R_n\|^2 .$$

$\|R_n\|$ désigne la norme du polynôme R_n dans l'espace euclidien $(E, (\ |\ ))$.

5°) <u>Application</u> :

a. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$: $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Calculer $I_2(f)$; comparer le résultat obtenu à la valeur exacte de l'intégrale. Vérifier la précision obtenue en admettant le résultat : $\dfrac{1}{6!} \sup\limits_{\pm 1 \leq x \leq 1} |f^{(6)}(x)| \leq 0{,}53$.

b. Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$: $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$. Calculer $I_2(g)$; comparer le résultat obtenu à la valeur exacte de l'intégrale. Vérifier la précision obtenue.

FIN DU PROBLÈME