ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996
ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

L'objet de ce problème est de montrer qu'il existe, pour tout entier n strictement positif, deux suites de réels a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, et α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n+1$, l'égalité

$$\textbf{(E)} \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 P(\alpha_i)\,.$$

ait lieu. Cette propriété suggère que, si f est une fonction $(2n+2)$-fois continûment dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$, le réel $I_n(f)$ défini par la relation $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 f(\alpha_i)$ soit une valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-1,1]$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels. Á tout couple (P,Q) de polynômes appartenant à E, associons le réel $(P|Q)$ défini par la relation :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il est admis que l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ de E dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Soit Φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation:

$$\Phi(P,Q) = (X.P|Q) = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il est admis que l'application Φ (de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$) est une forme bilinéaire symétrique.

Dans toute la suite, la lettre n désigne un entier strictement positif et E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Il est admis que l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire et qu'il existe un endomorphisme φ_n de E_n qui, à tout polynôme Q appartenant à E_n, fait correspondre le polynôme $\varphi_n(Q)$ de E_n vérifiant la relation :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } E_n, \quad (P|\varphi_n(Q)) = \Phi(P,Q)\,.$$

1°) Existence d'une base orthonormée de $(E_n, (\cdot|\cdot))$ associée à la forme Φ:

a) Vérifier que l'endomorphisme φ_n de l'espace euclidien $(E_n, (\cdot|\cdot))$ est symétrique.

b) **Exemple:** Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 2, l'endomorphisme φ_2 en recherchant les images des polynômes 1, X et X^2; en déduire la matrice associée à l'endomorphisme φ_2 dans la base des polynômes 1, X et X^2. Quelles sont les valeurs propres de cet endomorphisme ?

c) Démontrer l'existence d'une base orthonormée de polynômes e_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, appartenant à l'espace euclidien $(E_n, (\cdot|\cdot)$ et d'une suite de réels α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, tels que, pour tout couple (P,Q) de polynômes appartenant à E_n, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\Phi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (e_i|P)(e_i|Q)\,.$$

La base orthonormée $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $(E_n, (\cdot|\cdot))$ est dite associée à la forme bilinéaire Φ.

d) Démontrer que les réels α_i, pour tout entier i compris entre 0 et n ($0 \leqslant i \leqslant n$), ont une valeur absolue strictement inférieure à 1: $|\alpha_i| < 1$.
e) **Exemple:** dans cette question l'entier n est égal à 1 ; déterminer une base (e_0, e_1) orthonormée de l'espace euclidien $(E_1, (\cdot|\cdot))$ et deux scalaires α_0 et α_1 satisfaisant aux conditions de la question 1°.c ; on pourra d'abord déterminer une base orthonormée constituée de polynômes S_0 et S_1.
2°) Détermination d'une base orthonormée de E_n associée à la forme Φ:
L'espace euclidien $(E_n, (\cdot|\cdot))$ est supposé muni d'une base orthonormée $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ associée à la forme Φ. L'existence en a été démontrée ci-dessus. Désignons par a_i le produit scalaire du polynôme constant égal à 1 avec le polynôme e_i: $a_i = (1|e_i)$.
a) Démontrer la propriété : pour tout entier k, compris entre 1 et n ($1 \leqslant k \leqslant n$) et tout entier i compris entre 0 et n ($0 \leqslant i \leqslant n$): $(X^k|e_i) = (\alpha_i)^k a_i$.
En déduire, pour tout polynôme P de E_n et tout entier i compris entre 0 et n ($0 \leqslant i \leqslant n$), l'expression du produit scalaire $(e_i|P)$ en fonction des réels a_i et $P(\alpha_i)$.
b) Démontrer que pour tout entier i ($0 \leqslant i \leqslant n$) le produit des réels a_i et $e_i(\alpha_i)$ est différent de 0 ($a_i.e_i(\alpha_i) \neq 0$). En déduire que les réels a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont tous différents de 0.
Supposons que les réels α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, soient indexés de façon telle que les p premiers ($0 \leqslant p \leqslant n$) soient deux à deux distincts et que tout réel α_j de rang j supérieur strictement à p soit égal à un α_i de rang inférieur ou égal à p ($i \leqslant p$). Soit R_n le polynôme défini par la relation :

$$R_n(X) = \prod_{i=0}^{p}(x - \alpha_i) .$$

c) Démontrer, en considérant les produits scalaires $(e_i|R_n)$, que les réels α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux distincts et que le degré du polynôme R_n est $n + 1$.
Soit j un entier compris entre 0 et n ($0 \leqslant j \leqslant n$) ; désignons par L_j le polynôme défini par la relation :

$$L_j(x) = \prod_{k\neq j,\, 0\leqslant k\leqslant n} (x - \alpha_k) .$$

d) Démontrer que chaque polynôme L_j est proportionnel au polynôme e_j. Soit k_j la constante de proportionnalité : $e_j = k_j L_j$. Démontrer les deux relations :

$$k_j a_j L_j(\alpha_j) = 1 \ ; \quad (a_j)^2 = \frac{(1|L_j)}{L_j(\alpha_j)} .$$

En déduire les différentes bases orthonormées de E_n associées à la forme bilinéaire Φ.
3°) Validité de l'égalité (E):
Les réels a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, et α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont ceux qui ont été définis précédemment.
a) Démontrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n + 1$, l'égalité

$$\textbf{(E)} \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 P(\alpha_i) .$$

est vraie. Une méthode consiste à établir d'abord cette relation pour le polynôme constant égal à 1, puis pour les monômes X^k, $1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$, et enfin pour un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n + 1$.
b) Démontrer que cette relation **(E)** est fausse pour tout polynôme de degré $2n + 2$.
4°) Détermination du polynôme R_n:
Désignons toujours par R_n le polynôme défini par la relation: $R_n(X) = \prod_{i=0}^{p}(x - \alpha_i)$.
a) Soit P un polynôme appartenant à E_n; calculer le produit scalaire des polynômes P et R_n dans $(E, (\cdot|\cdot)$.
b) Soit U_n un polynôme de degré $n + 1$ dont le terme de plus haut degré est X^{n+1}. Supposons qu'il soit orthogonal dans $((E, (\cdot|\cdot))$ à tous les polynômes P du sous-espace vectoriel E_n. Démontrer que ce polynôme U_n est le polynôme R_n. En déduire une caractérisation simple du polynôme R_n et une méthode directe de détermination du polynôme R_n (qui évite de rechercher les réels α_i, $0 \leqslant i \leqslant n$).

c) Établir une relation simple entre les polynômes $R_n(X)$ et $R_n(-X)$.
d) Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 2, le polynôme R_2 puis les réels α_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$; $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$. En déduire ensuite les polynômes L_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, puis les réels a_i^2, $0 \leqslant i \leqslant 2$.
Soit f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$; étant donné un entier n ($n \geqslant 1$), désignons par $I_n(f)$ l'expression ci-dessous :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 f(\alpha_i) \, .$$

Il est admis que, si la fonction f est $(2n+2)$-fois continûment dérivable, l'erreur commise en remplaçant la valeur de l'intégrale par $I_n(f)$ peut être évaluée par la relation:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t) \, \mathrm{d}t - I_n(f) \right| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(2n+2)}(x)| \|R_n\|^2 \, .$$

$\|R_n\|$ désigne la norme du polynôme R_n dans l'espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$.
5°) Application:
a) Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$: $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Calculer $I_2(f)$; comparer le résultat obtenu à la valeur exacte de l'intégrale. Vérifier la précision obtenue en admettant le résultat: $\frac{1}{6!} \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(6)}(x)| \leqslant 0,53$.
b) Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$: $x \mapsto \frac{1}{2+x}$. Calculer $I_2(g)$; comparer le résultat obtenu à la valeur exacte de l'intégrale. Vérifier la précision obtenue.