Mines-Ponts 1996, Deuxième épreuve, option M

(8 pages)

Première partie

I-1°)

a. ◇ Soit $\varphi\ :\ P \longmapsto P(\alpha)$, φ est évidemment un morphisme d'anneau de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}$ et $\mathcal{I}(\alpha) = \operatorname{Ker}\varphi$ donc $\underline{\mathcal{I}(\alpha)\text{ est un idéal de }\mathbf{K}[X]}$.

◇ Tout idéal de $\mathbf{K}[X]$ est de la forme $P_0.\mathbf{K}[X]$ avec P_0 unitaire ou nul unique. Or $\mathcal{I}(\alpha) \neq \{0\}$ car, α étant algébrique sur $\mathbf{K}$, il existe $P \neq 0$ tel que $P(\alpha) = 0$ donc $\underline{\text{il existe } M_\alpha \text{ unitaire tel que } \mathcal{I}(\alpha) = M_\alpha.\mathbf{K}[X]}$.

b. Montrons plutôt: $\underline{(P = M_\alpha) \Longleftrightarrow (P \text{ est unitaire et irréductible dans } \mathbf{K}[X] \text{ et } P(\alpha) = 0)}$ ce qui donne le résultat demandé.

($\Rightarrow$) Si $P = M_\alpha$ alors P est unitaire et $P \in \mathcal{I}(\alpha)$ donc $P(\alpha) = 0$. De plus P est irréductible car, si $M_\alpha = QR$ (Q et R dans $\mathbf{K}[X]$), $QR(\alpha) = 0$ donc, par exemple, $Q(\alpha) = 0$ et $Q \in \mathcal{I}(\alpha)$ ce qui donne $M_\alpha \mid Q$ et, puisqu'on a aussi $Q \mid M_\alpha$, $M_\alpha = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ donc $R \in \mathbf{K}$.

($\Leftarrow$) Si $P(\alpha) = 0$ alors $P \in \mathcal{I}(\alpha)$ donc $P = QM_\alpha$. Or P est irréductible dans $\mathbf{K}[X]$ donc $Q \in \mathbf{K}$ ou $M_\alpha \in \mathbf{K}$. Mais $M_\alpha \notin \mathbf{K}$ car $M_\alpha(\alpha) = 0$ et que M_α n'est pas la consante nulle. Donc $Q = \lambda \in \mathbf{K}$ et, comme P et M_α sont unitaires, $\lambda = 1$.

Rem: $\mathbf{K}[\alpha] = \operatorname{Im}\varphi$ (cf **I-1°)**) donc $\mathbf{K}[\alpha]$ est bien un sous-anneau de $\mathbf{K}$.

I-2°) $\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$ $\alpha \in \mathbf{K}$ implique que pour tout $p \in \mathbf{N}$ $\alpha^p \in \mathbf{K}$ donc $\mathbf{K}[\alpha] \subset \mathbf{K}$ et donc $\mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}$ car $\mathbf{K}[\alpha] \supset \mathbf{K}.1$.
$\underline{(iii) \Rightarrow (ii)}$ $\alpha \in \mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}$ donc α est racine de $P = X - \alpha \in \mathbf{K}[X]$ unitaire et irréductible et donc $\underline{M_\alpha = X - \alpha}$ qui est de degré 1.
$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$ $M_\alpha = X + c$ avec $c \in \mathbf{K}$ et donc $M_\alpha(\alpha) = 0$ donne $\alpha = -c \in \mathbf{K}$.
$\underline{\text{Les trois propositions sont bien équivalentes}}$.

I-3°)

a. ◇ Montrons, par récurrence, que $\forall p \geq 2,\ \alpha^p \in \operatorname{Vect}(1,\alpha)$.On a $M_\alpha = X^2 + cX + d$ et $M_\alpha(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 = -c\alpha - d \in \operatorname{Vect}(1,\alpha)$ et, si $\alpha^p = a_p\alpha + b_p$, $\alpha^{p+1} = a_p\alpha^2 + b_p\alpha \in \operatorname{Vect}(1,\alpha)$ d'après ci-dessus.
On a donc $\mathbf{K}[\alpha] \subset \operatorname{Vect}(1,\alpha)$ donc la dimension de $\mathbf{K}[\alpha]$ est finie et inférieure à 2. Comme $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}[\alpha]$, elle est supérieure à 1 et, si c'était 1, on aurait $\mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}$ et le degré de α serait 1 ce qui n'est pas.
Donc $\underline{\dim(\mathbf{K}[\alpha]) = 2}$.

◇ La famille $(1,\alpha)$ est génératrice de $\mathbf{K}[\alpha]$ et a 2 éléments donc c'est une base de $\mathbf{K}[\alpha]$. Soit $x_0 = a_0 + b_0\alpha \in \mathbf{K}[\alpha]$, $x_0 \neq 0$. Posons β l'autre racine de M_α, on a $\alpha + \beta = -c$ et $\alpha.\beta = d$ donc $\big(a_0 + b_0\alpha\big)\big(a_0 + b_0\beta\big) = a_0^2 - ca_0b_0 + b_0^2 d = m \in \mathbf{K}$. De plus, si on avait $m = 0$, on aurait, puisque $x_0 \neq 0$, $0 = a_0 + b_0\beta = a_0 - b_0(c + \alpha)$ ce qui impliquerait $b_0 = a_0 - b_0c = 0$ donc $b_0 = a_0 = 0$. Donc $m \neq 0$ et $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{a_0}{m} + \dfrac{b_0}{m}\beta = \dfrac{a_0}{m} - \dfrac{b_0}{m}(c + \alpha) \in \mathbf{K}[\alpha]$.
Donc $\underline{\mathbf{K}[\alpha]\text{ est un corps}}$.

b. Soit $k = c^2 - 4d \in \mathbf{K}$ le discriminant de l'équation $M_\alpha(X) = 0$. On a $k \geq 0$ car cette équation a des solutions réelles et, si on avait $k = 0$, alors $\alpha = -\frac{c}{2} \in \mathbf{K}$ ($2 = 1 + 1 \in \mathbf{K}$) donc $k > 0$. On a $\alpha = -\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k} \in \mathbf{K}[\sqrt{k}]$ donc $\mathbf{K}[\alpha] = \operatorname{Vect}(1,\alpha) \subset \mathbf{K}[\sqrt{k}]$. Or $\sqrt{k}$ est racine de $X^2 - k$ donc algébrique de degré inférieur ou égal à 2, mais, si $d(\sqrt{k},\mathbf{K}) = 1$, on a $\mathbf{K}[\sqrt{k}] = \mathbf{K}$ ce qui n'est pas possible au vu de l'inclusion précédente. Donc $d(\sqrt{k},\mathbf{K}) = 2$ et l'égalité des dimensions donne $\mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}[\sqrt{k}]$.

Donc $\underline{\exists k \in \mathbf{K},\ k > 0, \quad \mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}[\sqrt{k}]}$.

I-4°)

a. $\diamond$ Tout $x \in \mathbf{K}[\alpha]$ s'écrit $x = P(\alpha)$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et, par division euclidienne, $P = QM_\alpha + R$ avec $\deg(R) \leq n-1$ donc $x = Q(\alpha)M_\alpha(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$. Voilà pour l'existence de R.
Pour l'unicité: si $x = R_1(\alpha) = R_2(\alpha)$ avec $\deg(R_i) \leq n-1$ alors $R_1 - R_2 \in \mathcal{I}(\alpha)$ donc $M_\alpha \mid R_1 - R_2$ et $\deg(R_1 - R_2) \leq n-1$ ce qui donne $R_1 - R_2 = 0$.
Donc $\underline{\forall x \in \mathbf{K}[\alpha],\ \exists! R \in \mathbf{K}_{n-1}[X], \quad x = R(\alpha)}$.

$\diamond$ Soit $\psi \ : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbf{K}[\alpha] \\ R & \mapsto & R(\alpha) \end{array}$. ψ est linéaire et ce qui précéde montre que ψ est bijective. ψ est donc un isomorphisme qui transforme une base de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ en une base de $\mathbf{K}[\alpha]$.
Donc $\underline{\dim(\mathbf{K}[\alpha]) = n-1 \text{ et une base de } \mathbf{K}[\alpha] \text{ est } \left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\right)}$.

b. $\diamond$ Soit $D = R \wedge M_\alpha$, on a $D \mid M_\alpha$ et D unitaire, or M_α est irréductible donc $D = 1$ ou $D = M_\alpha$. Mais $D \mid R$ et $R \neq 0$ (car $x \neq 0$) donc $\deg D \leq \deg R \leq n-1$ et donc $D = 1$. En conclusion, $\underline{M_\alpha \text{ et } R \text{ sont premiers entre eux}}$.

$\diamond$ Alors le théoréme de Bezout donne l'existence de 2 polynômes U, V, tels que $UR + VM_\alpha = 1$. On a donc, en particulier, $\underline{\exists U \in \mathbf{K}[X], \quad U(\alpha)R(\alpha) = 1}$.

c. Tout $x \in \mathbf{K}[\alpha]$ non nul a pour inverse $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{R(\alpha)} = U(\alpha) \in \mathbf{K}[\alpha]$, donc $\underline{\mathbf{K}[\alpha] \text{ est un corps}}$.

d. On a déjà que $\mathbf{K}[\alpha]$ est un corps contenant α et $\mathbf{K}$ et inclus dans $\mathbf{R}$. Si $\mathbf{L}$ est un corps (ou même un anneau) contenant α et $\mathbf{K}$ alors, par stabilité par $+$ et $\times$, il contient tous les $x = \sum\limits_{p=0}^{q} x_p \alpha^p$ avec $q \in \mathbf{N}$ et $x_p \in \mathbf{K}$ et donc $\mathbf{K}[\alpha] \subset \mathbf{L}$.
Donc $\underline{\mathbf{K}[\alpha] \text{ est le plus petit corps contenant } \alpha \text{ et } \mathbf{K} \text{ et inclus dans } \mathbf{R}}$.

I-5°)

a. $\diamond$ Montrons par récurrence sur n que $\underline{Q_n \in \mathbf{Z}[X]}$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$), est unitaire et de degré n.
$\to$ $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x + 1$ donc le résultat est vrai pour $n = 0, 1$;
$\to$ si c'est vrai jusqu'à $n+1$ ($n \geq 0$), en particulier $Q_n(x) = x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ et $Q_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ avec a_i et b_i des entiers relatifs. Or $Q_{n+2}(x) = P_{n+2}(\frac{x}{2}) = xQ_{n+1}(x) - Q_n(x) = x^{n+2} + b_n x^{n+1} + (b_{n-1} - 1)x^n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - a_i)x^i - a_0$ ce qui montre le résultat voulu.
On en déduit immédiatement que, pour tout n, $\underline{\deg(P_n) = n}$ et $\underline{\text{le coefficient dominant de } P_n \text{ est } 2^n}$.

$\diamond$ $P_{n+2}(0) = -P_n(0)$ et $P_0(0) = P_1(0) = 1$ donc $\underline{P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0) = (-1)^k}$.

$\diamond$ $\underline{P_2(x) = 4x^2 + 2x - 1}$, $\underline{P_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1}$, $\underline{P_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1}$.

b. $\diamond$ Si $\dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $q > 0$ est une racine rationnelle de $Q_n(x) = x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ ($n \geq 1$) on a, en multipliant par q^n, $p^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = 0$ d'où $p\left(p^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i p^{i-1} q^{n-i}\right) = -a_0 q^n$ et $p^n = q\left(-\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i-1}\right)$. Or $p \wedge q^n = p^n \wedge q = 1$, $p \mid -a_0 q^n$ et $q \mid p^n$ donc le théoréme de Gauss implique $p \mid a_0 = Q_n(0) = P_n(0) = \pm 1$ et $q \mid 1$ ce qui conduit à $q = 1$ et $p = \pm 1$.
On a donc montré que $\underline{\text{les seules racines rationnelles possibles de } Q_n \text{ sont -1 et 1}}$.

$\diamond$ $Q_{n+3}(x) + xQ_n(x) = xQ_{n+2}(x) - Q_{n+1}(x) + xQ_n(x) = x^2 Q_{n+1}(x) - xQ_n(x) - Q_{n+1}(x) + xQ_n(x) = (x^2 - 1)Q_{n+1}(x)$ soit $\underline{Q_{n+3}(x) + xQ_n(x) = (x^2 - 1)Q_{n+1}(x)}$.
Donc, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\underline{Q_{n+3}(\varepsilon) = \varepsilon Q_n(\varepsilon)}$ et donc $Q_{n+3}(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow Q_n(\varepsilon) = 0$. Comme les seules racines possibles de Q_n sont -1 et 1, on a :

les racines rationnelles éventuelles de Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes .

$\diamond$ Q_0 n'a pas de racine rationnelle, Q_1 a pour seule racine rationnelle 1 et $Q_2 = X^2 + X - 1$ n'a pas de racine rationnelle. Donc Q_{3k} et Q_{3k+2} n'ont pas de racine rationnelle, Q_{3k+1} a pour seule racine rationnelle 1 et Q_{3k+2} a pour racines rationnelles 1 et -1.
P_{3k} et P_{3k+2} n'ont pas de racine rationnelle et P_{3k+1} a pour seule racine rationnelle $\frac{1}{2}$.

I-6°)

a. L'équation caractéristique de la récurrence est $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$ qui a pour discriminant réduit $-\sin^2\theta \neq 0$ et pour solutions (dans $\mathbf{C}$) $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que $\forall n,\ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$. En particulier $u_0 = \lambda$ et $u_1 = \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta$ d'où $\forall n,\ u_n = u_0\cos(n\theta) + \dfrac{u_1 - u_0\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta)$.

b. $\diamond$ $v_n = P_n(\cos\theta)$ vérifie $v_{n+2} = 2\cos\theta v_{n+1} - v_n$, $v_0 = 1$,$v_1 = 2\cos\theta + 1$ donc

$$\begin{aligned} v_n &= \cos(n\theta) + \frac{2\cos\theta + 1 - \cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta) = \cos(n\theta) + \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}\sin(n\theta) \\ &= \cos(n\theta) + \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(n\theta) = \frac{\cos(n\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(n\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc $\forall n,\ v_n = \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

$\diamond$ On a $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{2k\pi}{2n+1} \in]0,\pi[$ donc, d'une part, d'aprés ce qui précède, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P_n\left(\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})\right) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)} = 0$ et, d'autre part, les $\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})$ sont deux à deux distincts. Comme P_n est de degré n, il ne peut avoir plus de n racines distinctes et donc on a exactement les racines de P_n.
Les racines de P_n sont les $x_{k,n} = \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

c. $\diamond$ $\cos(\frac{2\pi}{5})$,$\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ sont respectivement racines de P_2, P_3 et P_4 qui ont des coefficients entiers car $P_n(x) = Q_n(2x)$ et $Q_n \in \mathbf{Z}[X]$ donc $\cos(\frac{2\pi}{5})$,$\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}$.

$\diamond$ $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est racine de $\frac{1}{4}P_2$ qui appartient à $\mathbf{Q}[X]$, est unitaire et irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ car sinon il aurait deux racines rationnelles ($\deg P_2 = 2$) or P_2 n'a pas de racine rationnelle.
Donc $M_{\cos(\frac{2\pi}{5})} = \frac{1}{4}P_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.

$\diamond$ $\cos(\frac{2\pi}{7})$ est racine de $\frac{1}{8}P_3$ qui appartient à $\mathbf{Q}[X]$ et est unitaire. Si il n'était pas irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$, comme son degré est 3, il aurait au moins un facteur de degré 1 donc une racine rationnelle or P_3 n'a pas de racine rationnelle. Donc $M_{\cos(\frac{2\pi}{7})} = \frac{1}{8}P_3 = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}$.

$\diamond$ $\cos(\frac{2\pi}{9}) \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ est racine (simple) de P_4 donc $\cos(\frac{2\pi}{9})$ est racine de $\dfrac{P_4}{16(X+\frac{1}{2})} = X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8}$.
Ce polynôme n'a pas de racine rationnelle donc est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ comme pour P_3 ci-dessus, il est unitaire donc $M_{\cos(\frac{2\pi}{9})} = \dfrac{P_4}{16(X+\frac{1}{2})} = X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8}$.

I-7°)

a. $\diamond$ M_α est de degré 3 donc, d'après **I-4°)**, $\dim(\mathbf{Q}[\alpha]) = 3$ et une de ses bases est $\mathcal{B} = \left(1,\alpha,\alpha^2\right)$.

$\diamond$ $\cos(\frac{4\pi}{9}) = \cos(2\frac{2\pi}{9})$ soit $\cos(\frac{4\pi}{9}) = 2\alpha^2 - 1$ et $\cos(\frac{2\pi}{9}) + \cos(\frac{4\pi}{9}) + \cos(\frac{8\pi}{9}) = 0$ (somme des racines de M_α) donc $\cos(\frac{8\pi}{9}) = -2\alpha^2 - \alpha + 1$.

b. Erreur d'énoncé: $f = 0$ est une solution qu'il faut écarter, on impose donc $f \neq 0$.

$\diamond$ Soit $a \in \mathbf{Q}[\alpha]$ tel que $f(a) \neq 0$, on a $f(a) = f(a.1) = f(a)f(1)$ donc $f(1) = 1$.
D'autre part, $0 = f(0) = f\left(\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{8}\right) = (f(\alpha))^3 - \frac{3}{4}f(\alpha) + \frac{1}{8}$ donc $f(\alpha)$ est une racine de M_αc'est à dire $f(\alpha) \in \left\{\cos(\frac{2\pi}{9}),\cos(\frac{4\pi}{9}),\cos(\frac{8\pi}{9})\right\}$.

Comme $f\left(\alpha^2\right) = \left(f(\alpha)\right)^2$ et que f est déterminé par l'image de $\mathcal{B}$ on obtient ainsi trois applications possibles définies par $f_k(\alpha) = \cos(\frac{2k\pi}{9})$ avec $k = 1, 2, 3$.

$\diamond$ Réciproquement, soit β une racine de M_α, β est donc algébrique et $M_\beta = M_\alpha$. De plus, d'après **a.**, β s'écrit dans $\mathcal{B}$, donc $\beta \in \mathbf{Q}[\alpha]$ et donc $\mathbf{Q}[\beta] \subset \mathbf{Q}[\alpha]$.
Soit f définie sur $\mathbf{Q}[\alpha]$ par $f\big(P(\alpha)\big) = P(\beta) \in \mathbf{Q}[\beta] \subset \mathbf{Q}[\alpha]$ (donc $f(\alpha) = \beta$). Montrons que f est bien une application c'est à dire que $P(\alpha) = Q(\alpha) \Longrightarrow f\big(P(\alpha)\big) = f\big(Q(\alpha)\big)$. Mais $P(\alpha) = Q(\alpha) \Leftrightarrow (P-Q)(\alpha) = 0$ soit $P - Q = RM_\alpha$, on a alors $(P-Q)(\beta) = 0$ car $M_\alpha = M_\beta$ et c'est ce qu'on veux. On a alors facilement $f \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}[\alpha])$ et $\forall x, y,\ f(xy) = f(x)f(y)$.
On a donc exactement trois endomorphismes non nuls de $\mathbf{Q}[\alpha]$ vérifiant $\forall x, y,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

$\diamond$ $\mathbf{Q}[\beta] \subset \mathbf{Q}[\alpha]$ mais $\dim(\mathbf{Q}[\beta]) = 3$ et donc $\mathbf{Q}[\beta] = \mathbf{Q}[\alpha]$, ce qui nous permet de conclure que $\left(1, \beta, \beta^2\right)$ est une base de $\mathbf{Q}[\alpha]$. Un $f \in \{f_1, f_2, f_3\}$ transforme la base $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbf{Q}[\alpha]$ donc f est bijective donc $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathrm{GL}(\mathbf{Q}[\alpha])$. Soit $(f, g) \in \{f_1, f_2, f_3\}^2$, $g \circ f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}[\alpha])$ et $g \circ f^{-1}(xy) = g \circ f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(x)\right) f\left(f^{-1}(y)\right)\right) = g \circ f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(x) f^{-1}(y)\right)\right) = g\left(f^{-1}(x) f^{-1}(y)\right) = g \circ f^{-1}(x) g \circ f^{-1}(x)$.
Donc $\{f_1, f_2, f_3\}$ est un groupe .

$\diamond$ $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{Q}[\alpha]}$. $f_2(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$ donc $f_2(\alpha^2) = 4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 4\alpha\left(\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{8}\right) - \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha + 1 = -\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha + 1$. $f_3(\alpha) = -2\alpha^2 - \alpha + 1$ donc $f_3(\alpha^2) = (2\alpha^2 - 1)^2 + 2\alpha((2\alpha^2 - 1) + \alpha^2 = -\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha + 1 + 4\left(\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{8}\right) + \alpha - \frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$. Les matrices dans $\mathcal{B}$ sont donc :

$$M(f_1, \mathcal{B}) = I_3, \qquad M(f_2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M(f_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

I-8°)

a. Soit C_S un dénominateur (positif) commun aux coefficients de S, S s'écrit alors $S(x) = \dfrac{1}{C_S} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec $\forall i,\ a_i \in \mathbf{Z}$. On a donc $S(r) = \dfrac{1}{C_S q^n} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i}$, or $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i} \in \mathbf{Z}$ et est non nul car sinon $r \in \mathbf{Q}$ serait racine de S qui ne serait pas irréductible sur $\mathbf{Q}$. On a donc $\left|\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i}\right| \geq 1$ et donc $|S(r)| \geq \dfrac{1}{C_S q^n}$.

b. Soit $M = \sup\limits_{t \in [\alpha-1, \alpha+1]} |S'(t)|$, l'inégalité des accroissements finis s'écrit, pour tout $r \in [\alpha-1, \alpha+1]$, $|S(r)| = |S(r) - S(\alpha)| \leq M|\alpha - r| \leq \mathrm{Max}(M, 1)|\alpha - r|$ et, pour $r \in Q$ en particulier, on obtient $\dfrac{1}{C_S q^n} \leq \mathrm{Max}(M, 1)|\alpha - r|$.
Donc, en posant $K = \dfrac{1}{C_S \,\mathrm{Max}(M, 1)} > 0$, $\exists K > 0,\ \forall r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap [\alpha - 1, \alpha + 1],\ (q > 0) \quad |\alpha - r| \geq \dfrac{K}{q^n}$.

c. Version 5/2: $\forall k \geq 1,\ 10^{-k!} \leq 10^{-k}$ et $\left(\sum 10^{-k}\right)$ converge donc (t_n) converge et , de plus, $\forall n,\ t - t_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} = 10^{-(n+1)!} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 10^{(n+1)!-k!} = 10^{-(n+1)!} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 10^{(n+1)!-k!}$. Or, pour $k \geq n + 2$, $k! - (n + 1)! = (n + 1)!\left(\prod\limits_{i=n+2}^{k} i - 1\right) \geq (n + 1)!(k - 1) \geq k - 1 \geq k - n - 1$, inégalité vraie aussi pour $k = n + 1$, et donc $0 \leq t - t_n \leq 10^{-(n+1)!} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-(k-n-1)} = 10^{-(n+1)!} \dfrac{1}{1 - 10^{-1}} = \dfrac{10}{9} 10^{-(n+1)!}$. Donc $|t - t_n| \leq 2.10^{-(n+1)!}$.

Version 3/2: (t_n) est croissante et $\forall n,\ t_n \leq 10^{-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} 10^{-k} \leq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} 10^{-k} = \dfrac{1 - 10^{-(n+1)}}{1 - 10^{-1}} \leq \dfrac{10}{9}$ et donc (t_n) converge. Et, comme ci-dessus, on a $t_{n+p} - t_n \leq 10^{-(n+1)!} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} 10^{-(k-n-1)} \leq \dfrac{10}{9} 10^{-(n+1)!}$ et donc $|t - t_n| \leq 2.10^{-(n+1)!}$.

$\diamond$ Supposons t algébrique de degré $d \geq 1$. Remarquons que les résultats de **a.** et **b.** sont valables pour $n = 1$ (et même pour $n = 0$) les démonstrations n'utilisant pas $n \geq 2$. En les appliquant à $S = M_t$, on a $\exists\, K > 0,\ \forall r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap [t-1, t+1],\ |t - r| \geq \frac{K}{q^d}$. Or $\exists\, N,\ \forall n \geq N,\ t_n \in [t-1, t+1]$, d'autre part, $t_n = \frac{p}{10^{n!}}$ avec $p \in \mathbf{N}$ donc $\forall n \geq N,\ |t - t_n| \geq \frac{K}{10^{dn!}}$. Ce qui précède donne $\forall n \geq N,\ 2.10^{-(n+1)!} \geq \frac{K}{10^{dn!}}$ soit $10^{-(n+1-d)n!} \geq \frac{K}{2}$. Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^{-(n+1-d)n!} = 0$ ce qui conduit à une contradiction.

$\underline{t \text{ est transcendant sur } \mathbf{Q}}$.

Seconde partie

II-1°) $\diamond$ Soient $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$, $A'\left|\begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix}\right.$ et $A''\left|\begin{matrix} a'' \\ b'' \end{matrix}\right.$ appartenant à $\mathcal{K}$.

La droite (AA') admet pour équation $\begin{vmatrix} x & a & a' \\ y & b & b' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ dont les coefficients sont dans $\mathbf{K}$ (somme et produit d'éléments de $\mathbf{K}$).

Le cercle de centre A et de rayon $A'A''$ a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2 = (a'-a'')^2+(b'-b'')^2$ dont les coefficients sont dans $\mathbf{K}$.

Toute droite de $\mathcal{D}$ et tout cercle de $\mathcal{C}$ ont une équation à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$\diamond$ $(\Delta, \Delta') \in \mathcal{D}^2$ d'équations à coefficients dans $\mathbf{K}$, $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$, non paralléles ont pour point commun $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ dont les coordonnées sont données par les formules de Cramer $x_0 = \dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \in \mathbf{K}$, et $y_0 = \dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \in \mathbf{K}$.

Le point commun de deux droites sécantes de$\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{K}$.

$\diamond$ Soit $\Delta = (AA') \in \mathcal{D}$ avec $(A, A') \in \mathcal{K}^2$, on peut la définir par le paramétrage $\begin{cases} x = a + t(a'-a) \\ y = b + t(b'-b) \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$. Soit $\Gamma \in \mathcal{C}$ d'équation à coefficients dans $\mathbf{K}$ $x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$. Le paramètre t_0 d'un des points $M(t_0)$ communs à Δ et Γ (si il en existe) est donc donné par une équation de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbf{K}$. Donc t_0 est algébrique de degré 1 ou 2. Si son degré est 1, $t_0 \in \mathbf{K}$ et les coordonnées de $M(t_0)$ aussi. Si son degré est 2, les coordonnées de $M(t_0)$ appartiennent à $\mathbf{K}[t_0]$ qui est alors une extension quadratique de $\mathbf{K}$.

Si $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right. \in \Delta \cap \Gamma$ avec $\Delta \in \mathcal{D}$ et $\Gamma \in \mathcal{C}$, $(x_0, y_0) \in \mathbf{K}_1^2$ avec $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$ ou $\mathbf{K}_1$ extension quadratique de $\mathbf{K}$.

$\diamond$ Soient $(\Gamma, \Gamma') \in \mathcal{C}^2$ deux cercles non concentriques d'équations à coefficients dans $\mathbf{K}$ $x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ et $x^2+y^2-2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0$. Les points communs à Γ et Γ' sont donnés par :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2+y^2-2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ 2(\alpha'-\alpha)x + 2(\beta'-\beta)y = \gamma'-\gamma \end{cases}$$

Soit Δ d'équation $2(\alpha'-\alpha)x + 2(\beta'-\beta)y = \gamma'-\gamma$. C'est une droite car les deux cercles ne sont pas concentriques et elle appartient à $\mathcal{D}$ car, par exemple si $\alpha'-\alpha \neq 0$, elle contient $\left|\begin{matrix} \frac{\gamma'-\gamma}{2(\alpha'-\alpha)} \\ 0 \end{matrix}\right.$ et $\left|\begin{matrix} \frac{\gamma'-\gamma-2(\beta'-\beta)}{2(\alpha'-\alpha)} \\ 1 \end{matrix}\right.$ qui sont dans $\mathcal{K}$. On est donc ramené à ce qui précède.

Si $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right. \in \Gamma \cap \Gamma'$ avec $(\Gamma, \Gamma') \in \mathcal{C}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbf{K}_1^2$ avec $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$ ou $\mathbf{K}_1$ extension quadratique de $\mathbf{K}$.

II-2°)

a. $\diamond$ Traçons les cercles de centre A et rayon AB et de centre C et rayon CB. Ils se coupent en B et D avec $AD = AB$ et $CD = CB$ c'est à dire tel que $ABCD$ parallélogramme.

Donc D est constructible à partir de $\{A, B, C\}$.

$\diamond$ Il suffit de choisir deux points B, C de Δ puis de construire D comme ci-dessus et la droite cherchée est (AD). La parallèle à Δ passant par A est constructible à partir de $\{A, \Delta\}$.

b. $\diamond$ J est l'intersection de (OI) avec le cercle de centre O et de rayon OI; la droite (Oy) est la droite (MM') où M et M' sont les points communs des cercles de centres respectifs I et J et de rayon (par exemple) IJ; le point K est l'intersection de (Oy) avec le cercle de centre O et de rayon OI. Donc J et K sont constructibles .

$\diamond$ Soient $A\left|\begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix} \beta \\ 0 \end{matrix}\right.$. Le cercle de centre B et rayon $\alpha = OA$ coupe (Ox) en $C\left|\begin{matrix} \beta+\alpha \\ 0 \end{matrix}\right.$ et $C'\left|\begin{matrix} \beta-\alpha \\ 0 \end{matrix}\right.$.

Donc $\alpha + \beta$ est constructible .

$\diamond$ Traçons la parallèle à (KB) passant par A, elle coupe (Oy) en Dtel que, d'aprés le théorème de Thalès (ou l'équation de la droite), $\dfrac{OD}{OK} = \dfrac{OA}{OB}$ soit $OD = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Donc $\underline{\dfrac{\alpha}{\beta} \text{ est constructible}}$.

$\diamond$ Soit $A' \left| \begin{matrix} 0 \\ \alpha \end{matrix} \right.$ qui est constructible, traçons la parallèle à (KB) passant par A', elle coupe (Ox) en E tel que, d'aprés le théorème de Thalès , $\dfrac{OA'}{OK} = \dfrac{OE}{OB}$ soit $\alpha = \dfrac{OE}{\beta}$ et donc $OE = \alpha.\beta$. Donc $\underline{\alpha.\beta \text{ est constructible}}$.

$\diamond$ $\dfrac{A+J}{2}$ est constructible car c'est l'intersection de (Ox) avec la médiatrice de $[JA]$ qu'on construit comme la droite (NN') avec N et N' les points communs des cercles de centres respectifs A et J et de rayon AJ. Le cercle de centre $\dfrac{A+J}{2}$ et de rayon $A\dfrac{A+J}{2}$ a pour équation dans Oxy : $\left(x - \dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2$ et coupe donc (Oy) en $\left| \begin{matrix} 0 \\ \pm\sqrt{\alpha} \end{matrix} \right.$ (car $\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2 = \alpha$). Donc $\underline{\sqrt{\alpha} \text{ est constructible}}$.

II-3°)

a. Soit M constructible et soit $M_{-1} = O, M_0 = I, M_1, \ldots, M_n = M$ tels que $\forall k \geq 1,\ M_k$ est construit à partir de $\{M_{-1}, M_0, \ldots, M_{k-1}\}$. Montrons par récurrence sur n qu'il existe une suite $(\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que $\forall k = -1, 0, \ldots, n,\ M_k \in \mathbf{K}_p^2$.
$\rightarrow$ Si $n = 0$, $M \in \{O, I\}$ alors les coordonnées de M sont dans $\mathbf{Q}$ et le résultat est vrai avec $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}$.
$\rightarrow$ Si le résultat est vrai pour $n-1 \geq 0$, soit $(\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que $\forall k = -1, 0, \ldots, n-1,\ M_k \in \mathbf{K}_p$. Appliquons les résultats du **II-1°)** à $\mathbf{K} = \mathbf{K}_p$. Comme les coordonnées de $M_{-1}, M_0, \ldots, M_{n-1}$ sont dans $\mathbf{K}_p$, celles de M_n sont soit dans $\mathbf{K}_p$ et, dans ce cas, la suite $(\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ convient, soit dans une extension quadratique de $\mathbf{K}_p$ qu'on note $\mathbf{K}_{p+1}$ et la suite $(\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,p+1]\!]}$ vérifie aussi $(\mathcal{P})$ et $\forall k = -1, 0, \ldots, n,\ M_k \in \mathbf{K}_{p+1}^2$ car $\mathbf{K}_p^2 \subset \mathbf{K}_{p+1}^2$.
$\underline{\text{Si } M \text{ est constructible alors il existe } (\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,p]\!]} \text{ vérifiant } (\mathcal{P}) \text{ telle que } M \in \mathbf{K}_p^2}$.

b. $\diamond$ Montrons tout d'abord que <u>l'ensemble des réels constructibles **Cons** est un corps</u> .
On a immédiatement $\alpha \in \mathbf{Cons}$ si et seulement $|\alpha| \in \mathbf{Cons}$ constructible en utilisant le cercle de centre O et rayon $|\alpha|$ comme pour la construction de J. Ceci donne, avec le résultat de **II-2°) b.** et le fait que $0 \in \mathbf{Cons}$ que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{Cons}^2,\ \alpha.\beta \in \mathbf{Cons}$. De plus, $1 \in \mathbf{Cons}$ et donc $\forall\alpha \in \mathbf{Cons}^*,\ \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbf{Cons}$. Enfin, la démonstration de **II-2°) b.** montre que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{Cons}^2,\ |\alpha| + |\beta|$ et $|\beta| - |\alpha|$, donc aussi $|\alpha| - |\beta|$, sont constructibles donc $\alpha + \beta \in \mathbf{Cons}$.
$\diamond$ Montrons maintenant par récurrence sur n que, si $(\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ vérifie $(\mathcal{P})$ alors $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{Cons}$:
$\rightarrow$ Si $n = 0$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q} \subset \mathbf{Cons}$ car $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Cons}$ et que $\mathbf{Cons}$ est un corps.
$\rightarrow$ Supposons le résultat vrai pour $n - 1 \geq 0$. On a $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n-1}[\sqrt{\gamma}]$ avec $\gamma \in \mathbf{K}_{n-1}$ d'après **I-3°)**. Donc $\gamma \in \mathbf{Cons}$ par hypothèse et donc **II-2°) b.** donne $\sqrt{\gamma} \in \mathbf{Cons}$. On a donc $\mathbf{K}_{n-1} \subset \mathbf{Cons}$, $\sqrt{\gamma} \in \mathbf{Cons}$ et $\mathbf{Cons}$ corps donc, d'aprés **I-4°) d.**, $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n-1}[\sqrt{\gamma}] \subset \mathbf{Cons}$.
$\diamond$ Soit $M(x_M, y_M)$ avec $(x_M, y_M) \in \mathbf{K}_n^2$, x_M et y_M sont constructibles donc $A(x_M, 0)$ et $B(0, y_M)$ sont constructibles et donc M point commum de la parallèle à (Ox) passant par B et de la parallèle à (Oy) passant par A l'est.
Donc, $\underline{\text{si } (\mathbf{K}_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \text{ vérifie } (\mathcal{P}) \text{ et } M \in \mathbf{K}_n^2 \text{ alors } M \text{ est constructible}}$.

II-4°)

a. F est un sous-corps de H donc <u>H est un F-ev</u>. Soient $(g_1, \ldots, g_q)$ une base de G comme F-ev et $(h_1, \ldots, h_r)$ une base de H comme G-ev, montrons que $(g_1h_1, \ldots, g_qh_1, g_1h_2, \ldots, g_qh_r)$ est une base de H comme F-ev. Soit $x \in H$, x s'écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_ih_i$ avec $\forall i,\ x_i \in G$ qui s'écrivent donc $x_i = \sum\limits_{j=1}^{q} y_{i,j}g_j$ avec $\forall i,\ \forall j,\ y_{i,j} \in F$. On a donc $x = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{q} y_{i,j}g_jh_i$ donc la famille ci-dessus est génératrice et <u>H est un F-ev de dimension finie</u>. D'autre part, si $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{q} y_{i,j}g_jh_i = 0$, soit $\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\sum\limits_{j=1}^{q} y_{i,j}g_j\right)h_i = 0$ on a $\forall i,\ \sum\limits_{j=1}^{q} y_{i,j}g_j$ donc $\forall i,\ \forall j,\ y_{i,j} = 0$ et la famille est aussi libre donc c'est une base de H et $\underline{\dim_F(H) = qr}$.

b. D'aprés **a.**, puisque $\forall i,\ \dim_{\mathbf{K}_{i-1}}(\mathbf{K}_i) = 2$, et par une récurrence facile, on a $\underline{\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}_n) = 2^n}$.

c. Si α est constructible, c'est à dire si $A(\alpha, 0)$ est constructible, il existe une suite $\mathbf{K}_0, \dots, \mathbf{K}_n$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ et telle que $\alpha \in \mathbf{K}_n$. Comme $\mathbf{K}_n$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, la famille $(\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est liée sur $\mathbf{Q}$, autrement dit il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k \alpha^k = 0$ et donc α est algébrique sur $\mathbf{Q}$. On peut donc écrire, d'après **I-4°) d.**, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}[\alpha] \subset \mathbf{K}_n$. $\mathbf{K}_n$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$ donc sur $\mathbf{Q}[\alpha]$ (une famille génératrice sur $\mathbf{Q}$ l'est a fortiori sur $\mathbf{Q}[\alpha]$) et on peut appliquer **a.** : $\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}_n) = \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\alpha]) \dim_{\mathbf{Q}[\alpha]}(\mathbf{K}_n) = d(\alpha, \mathbf{Q}) \dim_{\mathbf{Q}[\alpha]}(\mathbf{K}_n)$ donc $d(\alpha, \mathbf{Q}) \mid \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}_n) = 2^n$ et donc $\underline{\exists p \in \mathbf{N},\ d(\alpha, \mathbf{Q}) = 2^p}$.

II-5°) $\diamond$ Soit Π_n le polygone régulier à n cotés souhaité, montrons tout d'abord le résultat suivant :

$$\Pi_n \text{ constructible } \iff \cos(\frac{2\pi}{n}) \text{ constructible.}$$

En effet, si Π_n est constructible, A_2 est constructible et la paralléle à (Oy) passant par A_2 coupe (Ox) en $(\cos(\frac{2\pi}{n}), 0)$. Réciproquement, si $\cos(\frac{2\pi}{n}$ est constuctible, $(\cos(\frac{2\pi}{n}), 0)$ l'est et la paralléle à (Oy) passant par ce point coupe le cercle de centre O et rayon 1 en deux points A_2 et A_n. Il suffit ensuite de construire A_{i+1} à partir de A_i comme intersection du cercle de centre O et rayon 1 avec le cercle de centre A_i et de rayon A_1A_2.

$\diamond$ D'autre part, on a : Π_n constructible $\implies \Pi_{2n}$ constructible . En effet, la médiatrice de $[A_1A_2]$ est constructible (cf **II-2°) b.**) donc le point A'_2 intersection du cercle de centre O et rayon 1 avec cette droite et d'ordonnée de même signe que celle de A_2 et on construit Π_{2n} à partir de I et A'_2 comme ci-dessus.

$\diamond$ $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$ donc est constructible et donc Π_3 et Π_6 sont constructibles. $\cos(\frac{2\pi}{4}) = 0$ est constructible donc Π_4 et Π_8 sont constructibles. $\cos(\frac{2\pi}{5}) \in \mathbf{K}_1$ extension quadratique de $\mathbf{Q}$ d'après **I-6°) c.** donc il est constructible d'après **II-3°) b.** ce qui donne Π_4 et Π_{10} constructibles. Enfin, d'après **I-6°) c.**, $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ ont pour degré sur $\mathbf{Q}$ 3 donc ne sont pas constructibles d'après **II-4°) c.**.
Les polygones Π_n avec $n \in [\![3, 10]\!]$ sont constructibles à l'exception de Π_7 et Π_9 .

Note historique :
Comme le signale l'énoncé ces problèmes de construction "à la règle et au compas" datent des Grecs. Pour Platon, les seules courbes parfaites sont la droite et le cercle. Ce genre d'a priori a fortement marqué l'histoire de la pensée occidentale: c'est le principe que les seuls mouvements parfaits sont circulaires uniformes qui sous-tend le système astronomique de Ptolémée qui a régné comme modèle de l'univers jusqu'à Kepler et Gallilée (il nous en reste le nom des jours et le "septième ciel"). En mathématiques, trois problèmes sont restés célébres: la duplication du cube dont parle l'énoncé (construire un cube de volume double) qui équivaut à $\sqrt[3]{2}$ constructible et qui est donc impossible; la trisection de l'angle (couper en angle en 3 angles égaux) qui est, en général impossible; et la célébrissime quadrature du cercle (construire un carré de même aire qu'un disque donné) qui équivaut à $\sqrt{\pi}$ constructible et qui est impossible car π est transcendant ce qui fut démontré par Lindemann en 1882.

* * *
* *
*