96 - MATH. II P'

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION P'
Durée de l'épreuve : 4 heures

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - P'

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option P', comporte 6 pages.

Dans tout le problème la lettre n désigne un entier strictement supérieur à 1. À toute matrice carrée complexe d'ordre n, d'éléments m_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, associons le réel $\|M\|$ défini par la relation :

$$\|M\| = n.\max\{\, |m_{ij}| \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n \,\} .$$

Il est admis que cette application du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées complexes d'ordre n est une norme. L'espace vectoriel normé $(M_n(\mathbb{C}), \|\ \|)$, de dimension n^2, est désigné par $\mathcal{M}$. À cause du choix de la norme et de la dimension finie n^2 de l'espace $M_n(\mathbb{C})$ les résultats suivants sont admis.

R-1. Cette norme est une norme d'algèbre : pour tout couple de matrices M et N de $\mathcal{M}$, il vient : $\|M.N\| \leq \|M\|.\|N\|$.

R-2. Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}$ (les éléments de la matrice U_p sont notés $u_{p;ij}$, $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq n$) ; pour que la suite de terme général U_p, $p \in \mathbb{N}$, soit convergente dans $\mathcal{M}$ et de limite une matrice donnée $U = (u_{ij})$, il faut et il suffit que chaque suite complexe $(u_{p;ij})_{p \in \mathbb{N}}$ soit convergente et de limite u_{ij}.

R-3. Soit $X : t \mapsto X(t)$ une application d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}$. Désignons les éléments de la matrice X(t) par $x_{ij}(t)$, $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq n$. Pour que la fonction $t \mapsto X(t)$ soit une application continûment dérivable de I dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que les n^2 fonctions, de I dans $\mathbb{C}$, $x_{ij} : t \mapsto x_{ij}(t)$ soient continûment dérivables.

R-4. Soient $f : t \mapsto f(t)$ une fonction complexe définie dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $X : t \mapsto X(t)$ et $Y : t \mapsto Y(t)$ deux applications de I dans $\mathcal{M}$. Si les trois fonctions f, X et Y sont continûment dérivables, les fonctions $f.X : t \mapsto f(t).X(t)$ et $X.Y : t \mapsto X(t).Y(t)$ sont continûment dérivables de I dans $\mathcal{M}$. Les dérivées sont données par la formule de Leibnitz.

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT.

Le problème est consacré à la recherche de solutions d'équations différentielles matricielles. Chaque équation différentielle considérée est définie par les éléments suivants :

- un intervalle ouvert I auquel appartient le réel 0.
- une aplication f continue de $\mathcal{M}\times I$ dans $\mathcal{M}$: $(M, t)\mapsto f(M, t)$.
- une matrice X_0 de $\mathcal{M}$.

Une solution $t\mapsto X(t)$ est une application, continûment dérivable d'un intervalle J, contenu dans I, voisinage de 0, dans $\mathcal{M}$ vérifiant les relations :

(E) $$\begin{cases} \text{pour tout } t \text{ de l'intervalle } J,\ \dfrac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), t\big)\ , \\ X(0) = X_0\ . \end{cases}$$

Il est admis que, pour les fonctions f considérées dans la suite, si $t\mapsto X(t)$ et $t\mapsto Y(t)$ sont deux solutions de l'équation différentielle **(E)** définies dans un même intervalle J, contenu dans I, voisinage de 0, ces deux solutions sont égales.

Première partie.

L'objet de cette partie est de résoudre des équations différentielles matricielles homogènes en recherchant une solution qui soit la somme d'une série entière.

I-1°) <u>Dérivabilité de la somme d'une série entière de matrices</u> :

Soit a un réel strictement positif et $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices ; supposons que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $]-a\ ,\ a[$, la série de terme général $t^p.A_p$, $p\in\mathbb{N}$, soit convergente dans $\mathcal{M}$ et de somme S(t) : $S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p\, A_p$.

Démontrer que chaque élément $s_{ij}(t)$ de la matrice S(t) est la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal au réel a. En déduire que la fonction $t\mapsto S(t)$ de $]-a\ ,\ a[$ dans $\mathcal{M}$ est dérivable ; préciser sa dérivée.

I-2°) <u>Résolution d'une équation différentielle homogène</u> :

L'objet de cette question est de montrer que si P, Q et X_0 sont trois matrices données de $\mathcal{M}$, il existe une suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ telle que la fonction $t\mapsto X(t)$ définie par la relation : $$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p\, A_p\ .$$

soit l'unique solution de l'équation différentielle

(H_1) $$\begin{cases} \text{pour tout } t \text{ réel},\ \dfrac{d}{dt}X(t) = P.X(t).Q\ , \\ X(0) = X_0\ . \end{cases}$$

a. Soit $S(t)$ la somme d'une série de terme général $t^p.B_p$, $p \in \mathbb{N}$, convergente lorsque le réel t appartient à un intervalle $[-a , a]$ $(a > 0)$; $S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p\, B_p$. Démontrer que si la somme $S(t)$ de cette série vérifie pour tout réel t de l'intervalle $[-a, a]$ les équations : $\frac{d}{dt}\, S(t) = P.S(t).Q$, $S(0) = X_0$, les matrices B_p, $p \in \mathbb{N}$, sont définies de manière unique en fonction des matrices P, Q et X_0. Donner, pour tout entier naturel p, l'expression de la matrice B_p en fonction des matrices P, Q et X_0. Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$\|B_p\| \le \frac{1}{p!}\ \|P\|^p\ \|Q\|^p\ \|X_0\|.$$

Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $t^p\ \|B_p\|$, $p \in \mathbb{N}$?

b. Déduire de ces résultats l'existence d'une fonction $t \mapsto X(t)$, somme d'une série de matrices de terme général $t^p.A_p$, $p \in \mathbb{N}$, unique solution, de l'équation différentielle (H_1).

c. Démontrer que la solution $t \mapsto X(t)$ obtenue vérifie pour tout réel t, l'inégalité :

$$\|X(t)\| \le \|X_0\|\ e^{|t|\ \|P\|\ \|Q\|}\ .$$

d. Démontrer l'égalité entre les deux solutions $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto Y(t)$ des équations $(\mathbf{H_1})$ lorsque le triplet de matrices (P, Q, X_0) vaut respectivement (A, I_n, I_n) et (I_n, A, I_n) ; A est une matrice donnée, I_n la matrice unité.

Désignons par $t \mapsto \exp(tA)$ ou $t \mapsto e^{tA}$ la solution commune aux équations dans ces deux cas.

I-3°) <u>Un exemple</u> :

Dans cette question l'entier n est égal à 2 ; étant donnés les deux nombres complexes a et b, différents de 0, soient A et B les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices A^2 , B^2, AB et BA. Déterminer les matrices e^{tA}, e^{tB} et $e^{t(A+B)}$ en fonction du réel t et des matrices I_2, A et B. Comparer le produit de matrices $e^{tA}.\ e^{tB}$ à la matrice $e^{t(A+B)}$. Vérifier la relation :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\ e^{tB}\right) = e^{tA}.(A+B).e^{tB}.$$

I-4°) <u>Propriétés de la fonction</u> $t \mapsto e^{tP}$.

a. Soient A et B deux matrices quelconques de l'espace $\mathcal{M}$; déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{tA}.e^{tB}$ en fonction des matrices e^{tA}, A+B et e^{tB}.

b. Soit f une fonction réelle continûment dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et A une matrice de $\mathcal{M}$. Démontrer que la fonction de I dans $\mathcal{M}$: $t \mapsto \exp\big(f(t).A\big)$ est continûment dérivable. Préciser sa dérivée.

I-5°) <u>Une expression de exp(A+B) lorsque les matrices A et B ne commutent pas</u> :

Dans cette question, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}$ qui commutent avec la matrice C définie par la relation : $C = A.B - B.A$.

a. Démontrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, la relation :

$$(A + B).A^p = A^{p+1} - p.A^{p-1}.C + A^p.B\ .$$

b. Soit X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}$ définie par la relation :

$$X(t) = \exp(t.A).\exp(-\frac{1}{2}\ t^2.C).\exp(t.B).$$

Déterminer la matrice M telle que la relation $\frac{d}{dt}\ X(t) = M.X(t)$ ait lieu.

c. En déduire une expression de la matrice exp(A+B) à l'aide des matrices exp(A), $\exp(-\frac{1}{2}\ C)$ et exp(B).

d. <u>Exemple</u> : Soient x, y, z, x', y' et z' des réels ; soient A et B les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices A.B et B.A ; établir que les matrices A et B commutent avec la matrice C = A.B – B.A . Il sera admis que les matrices A^3, $A^2.B$, $A.B^2$, B^3 sont nulles. Calculer, en fonction des matrices A, B, A^2, A.B, B.A et B^2, les matrices e^A, e^B, e^{A+B} et $\exp(-\frac{1}{2}\ C)$. Vérifier le résultat obtenu ci-dessus.

I-6°) <u>Propriétés de la fonction $A \mapsto \exp A$</u> :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}$; il est admis que la matrice exp(A) est inversible, d'inverse exp(–A) et que la matrice transposée de exp(A) est $\exp({}^tA)$. Établir que, si g est une fonction complexe définie sur un intervalle I continûment dérivable, la fonction de I dans $\mathcal{M}$: $t \mapsto \exp\big(g(t).A\big)$ est continûment dérivable. Préciser sa dérivée.

I-7°) <u>Application</u>.

Soient A, B et X_0 trois matrices données de $\mathcal{M}$; déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$(\mathbf{H_2})\quad \begin{cases} \text{pour tout } t \text{ réel, } \frac{d}{dt} X(t) = A.X(t) + X(t).B\ , \\ X(0) = X_0\ . \end{cases}$$

On pourra considérer la fonction Y déduite de X par la relation : $Y(t) = e^{-tA}.X(t).e^{-tB}$.

Seconde partie.

L'objet de cette partie est la résolution d'équations différentielles du type suivant :

$$\frac{d}{dt}\,X(t) = \big(X(t) - A\big).M(t).\big(X(t) - B\big)\ ;\ X(0) = X_0\ .$$

II-1°) <u>Dérivée de la fonction</u> $t \mapsto X(t)^{-1}$:

a. Soit $t \mapsto X(t)$ une fonction continûment dérivable d'un intervalle I de la droite réelle dans $\mathcal{M}$. Ces matrices X(t) sont supposées inversibles. Soit Y(t) la matrice inverse $X(t)^{-1}$. Démontrer que la fonction $t \mapsto Y(t)$ est continûment dérivable ; préciser la dérivée $\frac{d}{dt}\,Y(t)$ en fonction de X(t) et de sa dérivée $\frac{d}{dt}\,X(t)$.

b. Soit $t \mapsto C(t)$ une application continue d'un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, voisinage de 0, dans l'espace $\mathcal{M}$; démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction $t \mapsto X(t)$ continûment dérivable de I dans $\mathcal{M}$ vérifiant les relations :

$$\text{pour tout réel } t \text{ de } I,\quad \frac{d}{dt}\,X(t) = C(t)\ ;\ X(0) = I_n\ .$$

En déduire qu'il existe un intervalle ouvert J voisinage de 0 dans lequel la matrice X(t) est inversible. Préciser ce résultat, lorsque la matrice C(t) est égale à une matrice D constante (indépendante du réel t).

II-2°) <u>Résolution d'une équation différentielle non-linéaire</u> :

Soit $t \mapsto C(t)$ une application continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, voisinage de 0, dans l'espace $\mathcal{M}$ et X_0 une matrice de $\mathcal{M}$. L'objet de cette question est de rechercher une fonction $t \mapsto X(t)$ continûment dérivable d'un intervalle ouvert J, voisinage de 0, contenu dans I, dans $\mathcal{M}$ solution de l'équation différentielle :

$$(F_1)\qquad \begin{cases} \text{pour tout } t \text{ réel de } J,\ \dfrac{d}{dt}X(t) = X(t).C(t).X(t)\ , \\ X(0) = X_0\ . \end{cases}$$

a. Soit Y une fonction inconnue telle que : $X(t) = X_0.Y(t)^{-1}$, $Y(0) = I_n$.
Déterminer une équation différentielle (G_1) telle que si cette fonction Y est solution de (G_1), la fonction $X : t \mapsto X(t)$ soit solution de l'équation (F_1).

b. Démontrer qu'il existe une et une seule solution de l'équation (F_1), définie dans un intervalle ouvert J, voisinage de 0, contenu dans I.

II-3°) Généralisation et exemples :

a. Soient A, B, C et X_0 quatre matrices de l'espace $\mathcal{M}$. Le but de cette question est de rechercher une fonction $t \mapsto X(t)$ continûment dérivable d'un intervalle ouvert I, voisinage de 0, dans $\mathcal{M}$ solution de l'équation différentielle :

$$(F_2) \quad \begin{cases} \text{pour tout } t \text{ réel de } J, \ \dfrac{d}{dt} X(t) = \big(X(t) - A\big).C.\big(X(t) - B\big), \\ X(0) = X_0 . \end{cases}$$

Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de cette équation différentielle en introduisant la fonction inconnue Y définie par la relation :

$$X(t) = A + Y(t).e^{tC(A-B)} .$$

b. Expliciter la solution obtenue lorsque les deux matrices A et B sont égales : A = B. Préciser l'intervalle J de définition de la solution en fonction des valeurs propres d'une matrice.

c. Résoudre, lorsque l'entier n est égal à 2, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} X(t) = X(t)^2 + I_2 \quad ; \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} .$$

Expliciter X(t), préciser son intervalle de définition sachant que a est un réel quelconque.

FIN DU PROBLÈME