ENAC 1996 Epreuve Optionnelle de Mathématiques
4 heures

Dans tous le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormale $(e_1, .., e_n)$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Spec(u)$, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à λ.
Dans la partie I, on établit une relation d'ordre $\leq$ sur l'espace $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints et on s'intéresse à la racine carrée positive d'un endomorphisme auto-adjoint positif. Dans la partie II, on fait le lien entre $\leq$ et les spectres ordonnés. Dans la partie III, on introduit un produit scalaire $(./.)_u$ et on caractérise les projecteurs orthogonaux par une condition de minimalité sur $\leq$.
Il pourra être fait usage des synonymes suivants : symétrique pour auto-adjoint, positif pour semi-défini positif.

Partie I

1)

Soit la relation $\geq$ définie sur l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints de E par

$$\forall x \in E \qquad (x/u(x) - v(x)) \geq 0.$$

Si $u \geq v$ et $v \geq u$ alors

$$\forall x \in E \qquad (x/u(x) - v(x)) = 0.$$

Il en résulte que l'endomorphisme auto-adjoint $u - v$ est également antisymétrique, donc nul. La relation $\geq$ est donc antisymétrique. La relation étant trivialement réflexive et transitive, c'est donc une relation d'ordre.
La relation $u \geq v$ signifiant que $u - v$ a toutes ses valeurs propres positives (on anticipe sur la question 3)) ne correspond donc pas à un ordre total dès que $n > 1$: il suffit de choisir u et v tels que $u - v$ possède des valeurs propres strictement positives et strictement négatives.

2)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u \geq v$ alors, en utilisant la définition de l'adjoint f^*, on obtient

$$\forall x \in E \qquad (x/f \circ u \circ f^*(x) - f \circ v \circ f^*(x)) = (f^*(x)/(u - v)(f^*(x)) \geq 0.$$

Il en résulte que $f \circ u \circ f^* \geq f \circ v \circ f^*$.

3)

Soit $(U_1, .., U_n)$ une base orthonormale de E composée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_n$. Le calcul dans cette base donne

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k; \qquad u(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k U_k; \qquad (x/u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2.$$

Il en résulte que

$$u \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbf{R}^n \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \quad 1 \leq k \leq n \quad \lambda_k \geq 0.$$

4)

Avec les notations de 3), l'endomorphisme c de E défini sur la base $(U_1, .., U_n)$ par

$$\forall k \quad 1 \leq k \leq n \qquad c(U_k) = \sqrt{\lambda_k} U_k$$

est auto-adjoint, positif et il vérifie $c^2(x) = u(x)$ pour tout $x \in \{U_1, .., U_n\}$ donc $c^2 = u$.

5)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et c une racine carrée positive de u. On note $E_u(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $E_c(\mu_j)_{1 \leq j \leq q}$ leurs sous-espaces propres respectifs.
Pour tout j tel que $1 \leq j \leq q$, on a

$$\forall x \in E_c(\mu_j) \qquad u(x) = \mu_j^2 x,$$

il existe donc un unique i tel que $\lambda_i = \mu_j^2$. Il en résulte que $p \geq q$ et que $E_c(\mu_j) \subset E_u(\lambda_i)$.
Sachant que $E = \bigoplus_{1\leq j\leq q} E_c(\mu_j) = \bigoplus_{1\leq i\leq p} E_u(\lambda_i)$, on en déduit que $p = q$ et que $E_c(\mu_j) = E_u(\lambda_i)$. Ainsi c a les mêmes sous-espaces propres que u.
Soient c et c' deux racines carrées positives de u et $F = E_c(\mu) = E_{c'}(\mu')$ un sous-espace propre commun. On a $\mu \geq 0, \mu' \geq 0$ et l'existence d'un unique i tel que $\lambda_i = \mu^2 = \mu'^2$, donc $\mu = \mu'$.
Il en résulte que $c = c'$.

6)
Il est clair que $c = u^{1/2}$ est inversible si et seulement si u est inversible, ce qui équivaut à dire que les valeurs propres de u sont strictement positives. On a

$$(u^{1/2})^{-1}(u^{1/2})^{-1} = (u^{1/2}u^{1/2})^{-1} = u^{-1},$$

donc par unicité de la racine carrée positive de u^{-1}, il en résulte que

$$(u^{1/2})^{-1} = (u^{-1})^{1/2}.$$

Partie II

1)
Soient $U_1, .., U_p$ des vecteurs propres orthogonaux de u associés à des valeurs propres $\lambda_{i_1} \geq .. \geq \lambda_{i_p}$ et $A = \mathrm{Vect}(U_1, .., U_p)$. Le calcul dans cette base de A donne

$$\forall x \in A\backslash\{0\} \qquad x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k U_k; \qquad (x/x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \parallel U_k \parallel^2 > 0; \qquad (x/u(x)) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i_k} \alpha_k^2 \parallel U_k \parallel^2;$$

$$\lambda_{i_p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \parallel U_k \parallel^2 \leq (x/u(x)) \leq \lambda_{i_1} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \parallel U_k \parallel^2;$$

En particulier pour $x = U_1$ (resp. $x = U_p$), on a $(x/u(x)) = \lambda_{i_1}(x/x)$ (resp. $(x/u(x)) = \lambda_{i_p}(x/x)$) donc

$$\max_{x\in A\backslash\{0\}} \frac{(x/u(x))}{(x/x)} = \lambda_{i_1} \; ; \; \min_{x\in A\backslash\{0\}} \frac{(x/u(x))}{(x/x)} = \lambda_{i_p}.$$

2)
Soient u et v tels que $u \geq v$ et $U_1, .., U_n$ (resp. $V_1, .., V_n$) des vecteurs propres orthogonaux de u (resp. de v) associés à des valeurs propres $\lambda_1 \geq .. \geq \lambda_n$ (resp. $\mu_1 \geq .. \geq \mu_n$). Pour $p \in \{1, .., n\}$, on note $A = \mathrm{Vect}(U_p, .., U_n)$ et $A' = \mathrm{Vect}(V_1, .., V_p)$.
On a $\dim A = n - p + 1$ et $\dim A' = p$ donc $A \cap A' \neq \{0\}$. D'après 1) et la définition de $u \geq v$, on obtient, pour $x_0 \in A \cap A'\backslash\{0\}$, les inégalités

$$\mu_p = \min_{x\in A'\backslash\{0\}} \frac{(x/v(x))}{(x/x)} \leq \frac{(x_0/v(x_0))}{(x_0/x_0)} \leq \frac{(x_0/u(x_0))}{(x_0/x_0)} \leq \max_{x\in A\backslash\{0\}} \frac{(x/u(x))}{(x/x)} = \lambda_p.$$

Il en résulte que $sp\ u \geq sp\ v$.

3)
L'implication réciproque ($sp\ u \geq sp\ v \Rightarrow u \geq v$) est fausse dès que $n > 1$, car des vecteurs communs à $(U_1, .., U_n)$ et $(V_1, .., V_n)$ n'apparaissent pas forcément dans le même ordre.
Dans le cas $n = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 0$, on a $sp\ u \geq sp\ v$. Supposons qu'on ait $V_1 = U_2$ et $V_2 = U_1$, alors $(u - v)(U_1) = 3U_1$ et $(u - v)(U_2) = -U_2$.
Il en résulte que $\mathrm{Spec}(u - v) = \{3, -1\}$, donc on n'a pas $u \geq v$ d'après I-3).

4)

a)

Soit $(U_1,..,U_n)$ (resp. $(V_1,..,V_n)$) une base orthonormale de vecteurs propres de u (resp. de v). L'endomorphisme f de E, défini par $f(U_i) = V_i \quad \forall i = 1,..,n$, est donc orthogonal et vérifie ainsi la relation

$$\forall x \in E \quad (f(x)/f(x)) = (x/x).$$

b)

Soit f un endomorphisme orthogonal tel que $u \geq f \circ v \circ f^*$. D'après 2), on a donc $sp\ u \geq sp\ f \circ v \circ f^*$.
La relation $u \geq v$ résulte alors du fait que $f \circ v \circ f^*$ et v sont semblables et ont donc le même spectre.
Inversement soient u et v tels que $sp\ u \geq sp\ v$.
On définit l'endomorphisme f par $f(V_i) = U_i \quad \forall i = 1,..,n$. Alors f est orthogonal et le calcul donne

$$\forall i = 1,..,n \quad (u - f \circ v \circ f^*)(U_i) = u(U_i) - f \circ v(V_i) = (\lambda_i - \mu_i)U_i.$$

Il en résulte que $\mathrm{Spec}(u - f \circ v \circ f^*) = \{\lambda_i - \mu_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et donc, d'après I-3), que $u \geq f \circ v \circ f^*$.

5)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = id$, c'est-à-dire f orthogonal.

a)

Les endomorphismes $f \circ u \circ f^*$ et u sont semblables et ont donc les mêmes valeurs propres.

b)

Notons $sp\ f \circ u \circ f^* = \{\mu_1 \geq .. \geq \mu_n\}$. Comme on a $sp\ u \geq sp\ f \circ u \circ f^*$ et $\{\mu_1,..,\mu_n\} = \{\lambda_1,..,\lambda_q\}$, on en déduit que, si λ_q est de multiplicité n_q, alors $\mu_1 \geq .. > \mu_{n-n_q} = .. = \mu_n = \lambda_p$. On a les relations

$$\forall x \in E \quad (x/f \circ u \circ f^*(x)) \geq \mu_n(x/x); \qquad \forall x \in A_q \quad (x/u(x)) = \lambda_q(x/x);$$

La condition $u \geq f \circ u \circ f^*$, implique donc

$$\forall x \in A_q \quad (x/f \circ u \circ f^*(x)) = \lambda_q(x/x).$$

La définition de l'adjoint et le fait que f est orthogonal permettent alors d'écrire

$$\forall x \in A_q \quad (f^*(x)/u(f^*(x))) = \lambda_q(f^*(x)/f^*(x)).$$

ce qui entraîne $u(f^*(x)) = \lambda_q f^*(x)$ donc $f^*(x) \in A_q$.
A_q est donc stable par f^*(*et non pas invariant comme l'indique le texte*). A_q est également stable par u (car sous-espace propre de u) et par f (car $f = (f^*)^{-1}$). A_q est donc stable par $f \circ u \circ f^*$.
La relation précédente entraîne également que $f \circ u \circ f^*(x) = \lambda_q$x. Ainsi les restrictions de u et $f \circ u \circ f^*$ à A_q sont égales.

c)

L'espace A_q étant stable par f^*, alors son orthogonal $G = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{q-1}$ est stable par $(f^*)^* = f$.

d)

L'espace G est stable par u (car G est somme de sous-espaces propres de u), par f donc par f^* (car $f^* = f^{-1}$) et donc $f \circ u \circ f^*$. Les restrictions de u et $f \circ u \circ f^*$ à G vérifient $u \geq f \circ u \circ f^*$. On peut donc appliquer les résultats précédents ; ainsi A_{q-1} est stable par f^* (et aussi par f) ; u et $f \circ u \circ f^*$ coïncident sur A_{q-1} et l'orthogonal $A_1 \oplus \ldots \oplus A_{q-2}$ de A_{q-1} dans A_q est stable par f et u.
Ainsi, on établit successivement que tout sous-espace propre A_i de u est stable par f^* et f, et que u et $f \circ u \circ f^*$ coïncident sur chacun des A_i, donc que

$$u = f \circ u \circ f^*.$$

Partie III

1)

Dans un espace euclidien, ici E muni du produit scalaire $(./.)_u$, tout sous-espace F et son orthogonal $F^\perp$ sont supplémentaires.

2)

Soit p le projecteur u-orthogonal sur F et pour tout $x \in F$, notons $y = (u \circ p - p^* \circ u)(x) = u(x) - p^* \circ u(x)$. Le calcul donne

$$\| y \|_u^2 = (y/y)_u = (u(x) - p^* \circ u(x)/y)_u = (u(x) - p^* \circ u(x)/u(y)) = (u(x)/u(y) - p \circ u(y)) = ((id - p)(u(y))/x)_u$$

En utilisant le fait que $z - p(z) \in F^\perp$ pour tout vecteur $z \in E$, on en déduit que $\| y \|_u^2 = 0$ donc $y = 0$.
L'égalité $u \circ p = p^* \circ u \circ p$ résulte alors du fait que $p(x) \in F$ pour tout $x \in$E.
L'endomorphisme $u \circ p$ est auto-adjoint, car égal à $p^* \circ u \circ p$ auto-adjoint, ainsi

$$u \circ p = (u \circ p)^* = p^* \circ u.$$

3)

a)

De la définition de l'adjoint d'un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, (./.))$, on établit classiquement que $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$, où l'orthogonal est relatif à $(./.)$.

b)

Soit $F = \{x \in E / p(x) = x\}$ où p est un projecteur de E. Il est clair que $F = \{p(x)/x \in E\} = \mathrm{Im}p$ et que $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}p$. Il en résulte donc, d'après 1), que $\dim \ker p = n - \dim F = \dim F^\perp$.
Il suffit de vérifier que $F^\perp \subset \ker p$ pour établir l'égalité $F^\perp = \ker p$.
En utilisant l'hyphothèse $p^* \circ u = u \circ p$ et la caractérisation de F, on obtient

$$\begin{aligned} x \in F^\perp \quad & \Rightarrow \forall y \in F \quad (x/u(y)) = 0 \\ & \Rightarrow \forall z \in E \quad (x/u \circ p(z)) = 0 \\ & \Rightarrow \forall z \in E \quad (x/p^* \circ u(z)) = 0 \\ & \Rightarrow \forall z \in E \quad (p(x)/u(z)) = 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de considérer $z = x$ pour établir que $p(x) = 0$.
Ayant $F = \mathrm{Im}p$ et $F^\perp = \ker p$, p est par définition le projecteur u-orthogonal sur F.

4)

Soit p le projecteur u-orthogonal sur F, alors, d'après 2), on a $pop = p$ et $p^* \circ u = u \circ p$. A l'aide de passage aux adjoints et de compositions par u^{-1}, on obtient

$$p^* \circ p^* = p^*, \quad (p^*)^* \circ u^{-1} = u^{-1} \circ p^*.$$

On en déduit, d'après 3), que p^* est le projecteur u^{-1}-orthogonal sur $\{x \in E / p^*(x) = x\}$ $=\mathrm{Im}p^*$.
lus précisément, la relation $p^* \circ u = u \circ p$ implique que $\mathrm{Im}p^* = u(\mathrm{Im}p) = u(F)$ et que $\ker p^* = u(\ker p) = u(F^\perp)$.

5)

Soit p un projecteur u-orthogonal (sous-entendu dans l'énoncé). Un calcul élémentaire, en utilisant $p \circ u^{-1} = u^{-1} \circ p^*$ et $p \circ p = p$, donne

$$p \circ u^{-1} \circ p^* + (\mathrm{id}_E - p) \circ u^{-1} \circ (\mathrm{id}_E - p)^* = p \circ u^{-1} + (\mathrm{id}_E - p) \circ u^{-1} \circ \mathrm{id}_E = u^{-1}.$$

On en déduit alors que $u^{-1} \geq p \circ u^{-1} \circ p^*$ par le résultat

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad (x/u^{-1}(x) - p \circ u^{-1} \circ p^*(x)) &= (x/(\mathrm{id}_E - p) \circ u^{-1} \circ (\mathrm{id}_E - p)^*(x)) \\ &= ((\mathrm{id}_E - p)^*(x)/u^{-1} \circ (\mathrm{id}_E - p)^*(x)) \\ &= \| (\mathrm{id}_E - p)^*(x) \|_{u^{-1}}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

6)

Soit g un projecteur sur F et p le projecteur u-orthogonal sur F. On a donc $g \circ p = p$.
En utilisant I-2) avec g et $u^{-1} \geq p \circ u^{-1} \circ p^*$, on obtient $g \circ u^{-1} \circ g^* \geq (g \circ p) \circ u^{-1} \circ (g \circ p)^*$ d'où la relation

$$g \circ u^{-1} \circ g^* \geq p \circ u^{-1} \circ p^*.$$

7)

Soit f un projecteur sur F tel que pour tout projecteur g sur F on ait $g \circ u^{-1} \circ g^* \geq f \circ u^{-1} \circ f^*$.
Pour $g = p$, il résulte de 5) et de l'antisymétrie de la relation $\leq$ que $p \circ u^{-1} \circ p^* = f \circ u^{-1} \circ f^*$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E \quad (x / p \circ u^{-1} \circ p^*(x) - f \circ u^{-1} \circ f^*(x) = 0.$$

Par ailleurs, le calcul donne

$$(x / p \circ u^{-1} \circ p^*(x) - f \circ u^{-1} \circ f^*(x) = (p^*(x)/u^{-1} \circ p^*(x)) - (f^*(x)/u^{-1} \circ f^*(x)) = \| p^*(x) \|_{u^{-1}}^2 - \| f^*(x) \|_{u^{-1}}^2 .$$

Il en résulte que $\ker f^* = \ker p^*$, f^* est donc un projecteur parallèlement à $\ker p^* = u(F^\perp)$, ce qui implique

$$\forall x \in E \quad f^*(x) - p^*(x) = (f^*(x) - x) - (p^*(x) - x) \in \ker p^*.$$

Comme p^* est le projecteur u^{-1}-orthogonal sur $\mathrm{Im} p^* = u(F)$, le théorème de Pythagore s'applique

$$\forall x \in E \quad \| f^*(x) \|_{u^{-1}}^2 = \| f^*(x) - p^*(x) \|_{u^{-1}}^2 + \| p^*(x) \|_{u^{-1}}^2 .$$

Ce qui donne $f^*(x) - p^*(x) = 0$. Ainsi $f^* = p^*$ et $f = p$.

8)

Soit p le projecteur u-orthogonal sur F, alors d'après 5), u^{-1} et $p \circ u^{-1} \circ p^*$ sont comparables pour $\leq$.
Inversement supposons que f soit un projecteur sur F avec u^{-1} et $f \circ u^{-1} \circ f^*$ comparables pour $\leq$.
Si $u^{-1} \geq f \circ u^{-1} \circ f^*$, alors en appliquant I-2) avec tout projecteur g sur F, on obtient $g \circ f = f$ et

$$g \circ u^{-1} \circ g^* \geq (g \circ f) \circ u^{-1} \circ (g \circ f)^*.$$

Il en résulte, d'après 7) que f est le projecteur u-orthogonal p sur F.
Si $u^{-1} \leq f \circ u^{-1} \circ f^*$, alors

$$\forall x \in E \quad (x / f \circ u^{-1} \circ f^*(x) - u^{-1}(x)) = (f^*(x)/u^{-1} \circ f^*(x)) - (x/u^{-1}(x)) = \| f^*(x) \|_{u^{-1}}^2 - \| x \|_{u^{-1}}^2 \geq 0.$$

Il en résulte que $\ker f^* = \{0\}$ donc $f^* = id$ et $f = id$ est le projecteur u-orthogonal p sur $F = E$.

—— FIN ——