CONCOURS ECRIN 1996
COMPOSITION de MATHEMATIQUE I
(Série M)

Toutes les fonctions utilisées dans ce problème sont des fonctions réelles d'une variable réelle.
On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux sur $\mathbf{R}$ et dont la valeur en chaque point est la demi-somme des limites à droite et à gauche en ce point.
Si A est une partie non vide de $\mathbf{R}$ et si f est un élément de $\mathcal{D}$, on dit que f est *développable en série de Fourier* sur A si et seulement si la série de Fourier de f converge simplement sur A et admet f pour somme.

Partie I

Les résultats obtenus dans cette partie seront utilisés dans la suite du problème.

1. Pour $x \in]0, \pi[$, calculer les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin[(2k+1)x] \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos[(2k+1)x].$$

2. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b < \pi$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \frac{\cos(2nt)}{\sin t} dt \right) = 0. \qquad (1)$$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En remarquant que pour $k \geq 1$, $a_k = A_k - A_{k-1}$, montrer que la série $\sum \frac{a_n}{2n+1}$ converge et établir la relation

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2k+1} = -\frac{A_n}{2n+3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2A_k}{(2k+1)(2k+3)}. \qquad (2)$$

Partie II

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction appartenant à $\mathcal{D}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $x \in]0, \pi[$.
a) Etablir la convergence de la série $\sum u_n(x)$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = -\frac{1}{2}\ln(\tan\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos[2(n+1)t]}{\sin t} dt \qquad (3)$$

(on pourra calculer la dérivée de $\sum_{k=0}^{n} u_k$).

En déduire la somme sur $]0, \pi[$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

3. Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$.

4. Soit f la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}.$$

a) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et que $f \in \mathcal{D}$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$. f est-elle dérivable à droite en 0 ?
c) f est-elle développable en série de Fourier sur $\mathbf{R}$? Dans l'affirmative, préciser la série de Fourier de f.

Partie III

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbf{R}$, impaire, 2π-périodique et telle que

$$\begin{cases} g(0) = g(\pi) = 0 \\ (\forall x \in]0, \pi[)\ g(x) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

1. Montrer que g est développable en série de Fourier sur $\mathbf{R}$ et déterminer sa série de Fourier.

2. En déduire la valeur des sommes

$$\sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$. En utilisant le résultat de la question I.3), montrer que la série de Fourier de g converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$.
La convergence est-elle encore uniforme sur $[0, \pi]$?

Dans la suite du problème, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}.$$

4. Montrer que la courbe représentative de V_n peut se déduire de l'arc de cette courbe obtenue pour $x \in [0, \pi/2]$ par des transformations simples que l'on précisera.

5. Déterminer, pour $n \geq 1$, la plus petite valeur λ_n (respectivement μ_n) de x où V_n atteint un maximum (respectivement minimum) local sur $]0, \pi/2]$.
6. Etudier les variations de V_2 sur $[0, \pi/2]$ et tracer la courbe représentative de V_2 sur $[0, \pi]$.

Partie VI

Dans cette partie on étudie les suites $(V_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(V_n(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant été définies à la question III.5).

Pour $x \in [0, \pi/2]$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n(x) = \int_0^x \frac{\sin[2(n+1)t]}{2t} dt.$$

1. Montrer que les suites $(W_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(W_n(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont constantes et donner la valeur de ces constantes, notées a et b , sous forme d'intégrale.

2. Etablir la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et en déduire que la suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ vers une fonction que l'on précisera.

3. Soit h la fonction définie par

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \in]0, \pi/2] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
b) En déduire que la suite de fonctions $(V_n - W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale I et montrer que les suites $(V_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(V_n(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers a et b (définis à la question IV.1)).
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\alpha_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sint}{2t} dt.$$

a) Montrer que la série $\sum \alpha_n$ est une série alternée et que la suite $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, de limite 0. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$?

b) En déduire que $b < \dfrac{\pi}{4} < a$.