nom :

sp M1 carnot DIJON

Chaque problème est bien guidé, la numérotation des questions est en continu par delà les parties, ce qui facilite le repérage. La fin du problème est nettement signalée.

PREMIER PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

I-1) **$\sum_{\mathbf{a,R}}$ est une surface de révolution :** La section de la surface par le plan méridien (O,u,k) est le cercle $\rho = a + R\cos\varphi, z = R\sin\varphi$ indépendant de θ ; Le rayon est R ; le lieu de leur centre est le cercle $\boxed{(\mathbf{z = 0, x^2 + y^2 = a^2})}$; La surface de révolution a pour équation (en éliminant φ) : $(\rho - a)^2 + z^2 = R^2$

□ *REMARQUE : si la courbe méridienne (mme gauche) était donnée sous forme paramétrique, mais POLYNOMIALE, par rapport à l'une des coordonnées, - par exemple z - on aurait pu obtenir, l'équation de la surface de révolution engendrée, grâce à MAPLE par les bases de GRÖBNER par :* $sys := \{X^2 + Y^2 + Z^2 - x(z)^2 - y(z)^2 - z^2, Z - z\}; grobner[gbasis](sys, liste\ des\ parametres\ dans\ x(z),\ y(z)..], plex);$

I-2) **Existence d'un plan tangent :** On cherche pour quelles valeurs des paramètres, le point M est un point ordinaire (rappel veut dire non stationnaire alias rang($\frac{\partial F}{\partial\varphi}, \frac{\partial F}{\partial\theta}$)=2) ; Or $\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi u + R\sin\varphi k$ et $\frac{\partial F}{\partial\theta} = (a + R\cos\varphi)v$; comme v est indépendant de toute combinaison non nulle de u et k, le point M est toujours régulier sauf si le coefficient $a + R\cos\varphi$ de v dans $\frac{\partial F}{\partial\varphi}$ est non nul. D'o la discussion immédiate :

$$\begin{cases} a > R & \text{(le méridien ne coupe pas Oz) tous les points sont réguliers} \\ a = R & \text{(le méridien est tangent à Oz) seul } O = (\theta, \pi) \text{ n'est pas régulier} \\ 0 < a < R & \text{(le méridien coupe Oz) seul } \pm\sqrt{R^2 - a^2}k = F(\theta, Arcos\frac{-a}{R}) \text{ n'est pas régulier} \end{cases}$$

I-3) **Équation de $\sum_{\mathbf{a,R}}$:** On a vu en **(I-1)** que $(\rho - a)^2 + z^2 = R^2$ soit $\rho^2 + a^2 - 2a\rho + z^2 = R^2 \iff (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. (en isolant et élevant au carré $2a\rho$).

I-4.a) **Étude de γ_λ :** En passant en polaires (r,t) dans le plan (O,y,z) on a comme équation de la projection : $r^2 = 8\lambda^2\cos(2t)$, r=0 perdu par simplification, se retrouve avec $t = \pm\frac{\pi}{4}$. On reconnait un lemniscate de BERNOUILLI.

I-4.b) **Surface engendrée par rotation de Γ_λ :** La condition (sur les paramètres (u,v)) de rencontre d'un cercle parallèle, $(x^2 + y^2 = u^2, z = v)$ avec Γ_λ s'écrit : (on élimine, x,y,z) ($y^2 = u^2 - \lambda^2,\ z = v$, et enfin $(u^2 + v^2 - \lambda^2)^2 = 8\lambda^2(u^2 - v^2 - \lambda^2)$.

En remplaçant u et v en fonction de x, y, z, on a l'équation de la surface engendrée par la rotation de Γ_λ autour de Oz :

$(x^2 + y^2 + z^2 - \lambda^2)^2 = 8\lambda^2(x^2 + y^2 - z^2 - \lambda^2)$

On développe et on essaie de regrouper pour retrouver la forme de f(x,y,z) :

$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2\lambda^2x^2 - 2\lambda^2y^2 - 2\lambda^2z^2 + \lambda^4 = 8\lambda^2(x^2 + y^2) - 8\lambda^2z^2 - 8\lambda^4$ soit $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2\lambda^2(x^2 + y^2) + 6\lambda^2z^2 + 9\lambda^4 = 8\lambda^2(x^2 + y^2)$; on essaie de faire apparaitre un carré parfait dans le premier membre, en ajoutant $8\lambda^2(x^2 + y^2)$ aux deux membres de façon que $(x^2 + y^2)$ y ait le mme coefficient $6\lambda^2$ que z^2 :

On a alors $x^2 + y^2 + z^2)^2 + 6\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + 9\lambda^4 = 16\lambda^2(x^2 + y^2)$ soit :

$\boxed{(\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 3\lambda^2})^2 = \mathbf{4(2\lambda)^2(x^2 + y^2)}}$; On a une TORE OUVERT avec $\boxed{\mathbf{a = 2\lambda > R = \lambda}}$

DEUXIÈME PARTIE

II-5.a) **Section par le plan x=0 :** En faisant x=0, on voit apparaitre une différence de carrés : $(y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2y^2 = 0 = ((y^2 + z^2 + a^2 - R^2 - 2ay)((y^2 + z^2 + a^2 - R^2 + 2ay) = 0$ On reconnait les cercles $\boxed{(\mathbf{y - \varepsilon a})^2 + \mathbf{z^2 = R^2}}$.

II-5.b) **Le plan x=0, coupe P suivant une tangente commune aux deux cercles :** D'après sa définition α représente l'angle avec Oy des tangentes issus de O avec les deux cercles précédents ; Comme $R = a\sin\alpha$ l'équation aux y des points e rencontre de chacun des cercles précédents, avec la trace sur leur plan du plan P, est : $(y-\varepsilon a)^2 + y^2\tan^2\alpha = a^2\sin^2\alpha$ ou encore : $u^2 - 2a\varepsilon y + y^2\tan^2\alpha = -a^2\cos^2\alpha$; ou encore $\frac{y^2}{\cos^2\alpha} - 2a\varepsilon y + a^2\cos^2\alpha = 0$ et enfin $(y-\varepsilon a\cos^2\alpha)^2 = 0$: les coordonnées des deux points A_i sont $\boxed{\mathbf{y} = \varepsilon\mathbf{a}\cos^{\mathbf{2}}\alpha \Big| z = \varepsilon a\sin\alpha\cos\alpha \Big|}$

II-5.c) **Section de P et du TORE :** On fait un changement d'axes, en prenant le plan P comme plan OXY ; Les formules de changement de composantes sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y\cos\alpha \\ Y\sin\alpha \end{pmatrix} ;$$

Dans ce nouveau repère l'équation du plan P est Z=0, celle de son intersection avec le TORE est $(X^2+Y^2+a^2\cos^2\alpha)^2 - 4a^2(X^2+Y^2\cos^2\alpha) = 0$; on emploie la technique de VILLARCEAU en modifiant et compensant certains termes du premier membre : $(X^2+Y^2-a^2\cos^2\alpha)^2 - 4a^2(X^2+Y^2\cos^2\alpha + \mathbf{4a^2X^2}\cos^{\mathbf{2}}\alpha + \mathbf{4a^2Y^2}\cos^2\alpha = \mathbf{0}$; il reste : $(X^2+Y^2-a^2\cos^2\alpha)^2 - 4a^2(X^2)\sin^2\alpha = 0$ et par différence de carrés on reconnait deux cercles : $X^2+Y^2-2\varepsilon aX\sin\alpha = a^2\cos^2\alpha$ soit $\boxed{(\mathbf{X} - \varepsilon\mathbf{a}\sin\alpha)^{\mathbf{2}} + \mathbf{Y^2} = \mathbf{a^2} \Big|}$. Nous reconnaissons a, comme rayon des cercles de VILLARCEAU : ils ont mme rayon que le cercle moyen du TORE.

II-5.d) **Plan tangent au tore en $\mathbf{A_i}$:** Le plan P étant perpendiculaire au plan méridien X=0 est tangent au parallèle des points A_i et comme il est tangent aux méridiens de ces points, il est bien bitangent au tore en ces points (rappelons qu'un plan tangent en un point régulier d'une nappe est contient les tangentes à tous les arcs C_1 tracés sur la nappe et passant par le point en question).

TROISIÈME PARTIE

III-6) **Vecteur tangent au parallèle et à une courbe tracée sur le TORE** : Un vecteur tangent à la première courbe est le vecteur dérivé par rapport à θ soit $(-R\sin\varphi\varphi'\cos\theta - (a+R\cos\varphi)\sin\theta, (-R\sin\varphi\varphi'\sin\theta + (a+R\cos\varphi)\cos\theta, R\cos\varphi\varphi')$; Un vecteur tangent au parallèle s'obtient en faisant $\varphi = constante$ ce qui donne après simplification par $(a+R\cos\varphi)$ non nul puisque le tore est ouvert, $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$;

III-7.a) **Équation différentielle des LOXODROMIES DU TORE :** On écrit que le produit scalaire des deux vecteurs tangents est $\cos\beta$ le produit de leur norme, ce qui donne en élevant au carré, la condition : $(a+R\cos\varphi)^2 = \cos^2\beta\big[R^2\varphi'^2 + (a+R\cos\varphi)^2\big]$;

En développant cela donne $-(a+R\cos\varphi)^2\sin^2\beta + R^2\varphi'^2\cos^2\beta$ et comme $R = a\sin\alpha$, on trouve bien la condition demandée.

III-7.b) **(1) équivaut à (2) :** On donne à β la valeur α et on simplifie les deux membres par $\sin^2\alpha$ qui est non nul cal $a > R$.

.

III-8.a **Résoudre (2) avec des conditions initiales imposées :** L'équation (2) est une équation à variables séparées : $\frac{\cos\alpha d\varphi}{1+\sin\alpha\cos\varphi} = d\theta$, pour l'intégrer on pose $t = \tan\frac{\varphi}{2}$ d'o $2dt = (1+t^2)d\varphi$ et l'équation (2) se transforme en $d\theta = \frac{2\cos\alpha dt}{1+\sin\alpha+(1-\sin\alpha)t^2} = \frac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\frac{dt}{t^2+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ et enfin $\theta + constante = \frac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}Arctan\big(\frac{t}{\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}}\big)$; enfin compte tenu de la condition initiale imposée la constante est nulle et on a : $\theta = 2Arctan\big(\frac{t}{\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}}\big) = 2Arctan\big(t\sqrt{\frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}}\big) = 2Arctan\big(t\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})\big)$ et en prenant la tangente des deux membres $\tan(\frac{\theta}{2}) = \tan(\frac{\varphi}{2})\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$ et ainsi $\boxed{\tan(\frac{\varphi}{\mathbf{2}}) = \frac{\tan(\frac{\theta}{\mathbf{2}})}{\tan(\frac{\pi}{\mathbf{4}}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}})} \Big|}$. Si on fait $\theta = \pi-$ alors $\tan(\frac{\varphi}{2}) = +\infty$, donc il est normal de prolonger : $\varphi(\pi) = \pi-$.

III-8.b **Représentation paramétrique de L :** On a $\rho = a(1+\sin\alpha\cos\varphi)$; Or $\cos\varphi = \frac{1-\tan^2(\frac{\varphi}{2})}{(1+\tan^2(\frac{\varphi}{2})}$ et si l'on pose $s = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ on a : $\cos\varphi = \frac{\tan^2 s-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{\tan^2 s+\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\tan^2 s\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\tan^2 s\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\tan^2 s(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)}{\tan^2 s(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)} = \frac{(\tan^2 s-1)+\cos\theta(1+\tan^2 s)}{(\tan^2 s+1)+\cos\theta(-1+\tan^2 s)} = \frac{-\cos(2s)+\cos\theta}{1-\cos\theta\cos(2s)} = \frac{-\sin\alpha+\cos\theta}{1-\cos\theta\sin\alpha}$ et par conséquent

$\rho = a\big(\frac{1-\cos\theta\sin\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\theta}{1-\cos\theta\sin\alpha}\big)$ et enfin $\boxed{rho = \frac{a\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha\cos\theta}}$

De mme $z = R\sin\varphi = a\sin\alpha\frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} = a\sin\alpha\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan s\big(1+\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan^2 s}\big)} = a\sin\alpha\frac{2\tan\frac{\theta}{2}\tan s}{\tan^2 s+\tan^2\frac{\theta}{2}} = a\sin\alpha\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan s}{2\tan^2 s\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ $=a\sin\alpha\frac{2\sin\theta\tan s}{(1+\cos\theta)\tan^2 s+(1-\cos\theta)} = a\sin\alpha\frac{2\sin\theta\tan s}{\cos\theta(\tan^2 s-1)+\tan^s+1} = = a\sin\alpha\frac{2\sin\theta\sin(2s)}{\cos\theta\cos(2s)+1} = = a\sin\alpha\frac{2\sin\theta\cos\alpha}{-\cos\theta\sin\alpha+1}$ et ainsi $\boxed{\mathbf{z} = \frac{\mathbf{a}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta}{\mathbf{1}-\cos\theta\sin\alpha}}$; et ainsi on a bien une représentation paramétrique en coordonnées cylindriques de la courbe (L).

III-8.c **Projection de L sur le plan (O,i,j) :** On reconnait une représention en polaire d'une CONIQUE AYANT SON FOYER AU PÔLE, puisque : $\rho = \frac{a\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha\cos\theta} = \frac{ed}{1+e\cos(\theta-Cte)}$; Cette conique est une ELLIPSE car l'excentricité e verifie : $e = \sin\alpha$ est inférieur strictement à 1. Ici $Cte = \pi$.

III-8.d **NATURE DE L :** Comme $y = \rho\sin\theta$ on constate que $z = y\tan\alpha$, par conséquent par **II-5.c** L est un des deux CERCLES DE Antoine Yvon VILLARCEAU (1813-1883) (on en trouve une représentation matérielle, au musée de l'œuvre Notre Dame à STRASBOURG, o le haut de l'escalier à vis est couronné par une TORE sculpté précisément en sorte que ses artes vives soient des cercles de VILLARCEAU - ce qui prouve, qu'ils étaient connus avant lui - *(Berger 3 pages 196-197)*). L'autre correspond au choix $\varepsilon = -1$.

DEUXIEME PROBLÈME

PARTIE A

A-1 **Comparer $\mathbf{J_N(-x)}$ et $\mathbf{J_{-N}(x)}$:** $\pi J_{-N}(x) = \int_0^\pi \cos((-N)\theta - x\sin\theta)d\theta =_{(\text{parité de cos})} \int_0^\pi \cos(N\theta-(-x)\sin\theta)d\theta = \pi J_N(-x)$ soit $\boxed{\mathbf{J_{-N}(X) = J_N(-x)}}$.

■ **Parité de $\mathbf{J_N(x)}$:** $\pi J_N(-x) = \int_0^\pi \cos(N\theta+x\sin\theta)d\theta =_{(\theta=\pi-u)} -\int_\pi^0 \cos(N(\pi-u)+x\sin u)du =_{(cos\ paire)}$ $\int_0^\pi \cos(-N\pi+Nu-x\sin u)du = (-1)^N J_{-N}(x)$: $\boxed{\mathbf{J_{-N}(x) = (-1)^N J_N(x)}}$

A-2 **$\mathbf{J_N(-x)}$ est $\mathbf{C_\infty}$:** La fonction sous le signe intégral étant C_∞, f est elle mme C_∞. La dérivation sous le signe intégral étant justifiée on en déduit : $J'_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\theta)\sin(N\theta-x\sin\theta)d\theta$ et $J"_N(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(\theta)\sin(N\theta-x\sin\theta)d\theta$.

A-3 **$\mathbf{J_N}$ vérifie $\mathbf{B_N}$:** Le premier membre de B_N vaut quand on y remplace y par J_N : $x^2J"_N + xJ'_N + (x^2-N^2)J_N = \frac{1}{\pi}\big(-x^2\sin^2\theta\cos(N\theta-x\sin\theta)+x\sin\theta\sin(N\theta-\sin\theta)+(x^2-N^2)\cos(N\theta-x\sin\theta)\big)d\theta = \frac{1}{\pi}\big((x^2\cos^2\theta-N^2)\cos(N\theta-x\sin\theta)+x\sin\theta\sin(N\theta-\sin\theta)\big)d\theta = \frac{1}{\pi}\big((x\cos\theta+N)(x\cos\theta-N)\cos(N\theta-x\sin\theta)+x\sin\theta\sin(N\theta-\sin\theta)\big)d\theta$ $= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(-(x\cos\theta+N)\sin(N\theta-x\sin\theta)\big)'d\theta = -\Big[(x\cos\theta+N)\sin(N\theta-x\sin\theta)\Big]_0^\pi = 0$ cqfd.

A-4 **Calculer $\mathbf{J_0(0)}$:** $\pi J_0(0) = \int_0^\pi \cos(0)d\theta = 1$; Comme $\pi J_N(x) = \int_0^\pi -\sin\theta\sin(x\sin\theta)d\theta$, alors $J'_N(0) = 0$; enfin $\pi J"_N(x) = \int_0^\pi(-\sin^2\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta$ et enfin $2\pi J"_N(0) = \int_0^\pi(\cos(2\theta)-1)d\theta = -\pi$ et enfin $\boxed{\mathbf{J"_N(0) = \frac{-1}{2}}}$.

A-5.a **Relation de récurrence :** D'après la formule d'addition ($\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$) des cosinus : $\pi x\big[J_{N+1}(x)+J_{N-1}(x)\big] = 2\int_0^\pi \cos(N\theta - x\sin\theta)(x\cos\theta - N + N)d\theta = 2N\pi J_N(x) - 2\int_0^\pi \cos(N\theta - x\sin\theta)(N\theta - x\sin\theta)'d\theta = 2N\pi J_N(x) - 2[\sin(N\theta - x\sin\theta)]_0^\pi = 2N\pi J_N(x) - 0$; par conséquent : $\boxed{\mathbf{J_{N-1}(x) + J_{N+1}(x) = \frac{2N}{x}J_N(x)}}$.

A-5.b **Relation à établir :** De mme $\pi(J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x)) = 2\int_0^\pi \sin(N\theta - x\sin\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi J_N'(x)$. Donc $\boxed{\mathbf{J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x) = 2J_N'(x)}}$

A-5.c $\mathbf{J_1(x) + J_0'(x) = 0}$: $\pi(J_1(x) + J_0'(x)) = \int_0^\pi \big[\cos(\theta - x\sin\theta) - \sin\theta\sin(x\sin\theta)\big]d\theta = \int_0^\pi \big[\cos(\theta)\cos(-x\sin\theta)\big]d\theta = \frac{1}{x}[\sin(x\sin\theta]_0^\pi = 0$, pour $x \neq 0$; Il est immédiat le premier membre étant continu par rapport à x, que ceci est encore vrai pour x=0.

PARTIE B

B-6 **Développer $\mathbf{J_0(x)}$ en série entière :** $\pi J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k}\theta}{(2k)!}d\theta$; or $|\frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k}\theta}{(2k)!}| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ Il y a donc CONVERGENCE NORMALE donc UNIFORME de la série sous le signe $\int$, par rapport à θ, on peut donc permuter $\int$ et $\sum$, ce qui donne : $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\pi(2k)!}\int_0^p i\sin^{2k}\theta d\theta$; comme $\int_0^p i\sin^{2k}\theta d\theta \leq \pi$, dominée par une série entière de rayon infini, la série de $J_0(x)$ est aussi de rayon infini.

B-7.a **$\mathbf{J_N}$ est développable en série entière :** On raisonne par récurrence grâce aux relations obtenues en **(A-5)** : Comme J_0 est développable en série entière de rayon infini par **(B-6)**, il en est de mme de J_0' et comme d'après **(A-5.c)** $J_1 = -J_0'$, J_1 est aussi développable avec le rayon infini ; raisonnons par récurrence, supposons que l'on ait démontré que J_N et J_{N-1} soient développables avec le rayon infini (ce qui vient d'tre vérifié par N=1, alors la relation **(A-5.b)** $J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x) = 2J_N'(x)$ s'écrivant : $J_{N+1}(x) = 2J_N'(x)J_{N-1}(x) - 2J_N'(x)$, montre que J_{N+1} différence de deux séries de rayon infini,est aussi développable et de rayon infini.

B-7.b **Préciser le terme général de la série de $\mathbf{J_n(x)}$:** On cherche les solutions de (B_N), développables en série entière, par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\left\{\begin{array}{c|ll} x^2 - N^2x & y = a_0 + a_1x^+ ... & + a_px^p + ... \\ x & y' = a_1 + 2a_2x + ... & + na_px^{p-1} + ... \\ x^2 & y" = 2a_2 + 6a_2x + ... & + p(p-1)a_px^{p-2} + ... \\ \hline \text{coefficients} \uparrow & \mathbf{0 = -N^2a_0 + x(-N^2a_1 + a_1) + ... + x^p(p(p-1)a_p + pa_p - N^2a_p + a_{p-2}) + ...} & \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système (par unicité du développement en série entière) $\left\{\begin{array}{l} -N^2a_0 = 0 \\ -N^2a_1 + a_1 = 0 \\ -N^2a_2 + +a_0 + 2a_2 + 2a_2 = 0 \\ .... \\ (p^2 - N^2)a_p + a_{p-2} = 0 \end{array}\right.$

Tant que $p < N$ les premières relations donnent $a_0 = a_1 = .. = a_{N-1} = 0$; La relation numéro N est automatiquement vérifiée quel que soit a_N. Les relations suivantes donnent a_{n+2k} en fonction de N, k, a_N, et dans cette série on peut mettre x^N en facteur, et seuls des termes ayant un indice de mme parité que N sont non nuls.

■ Précisons ce résultat : $\left.\begin{array}{c} a_{N+2}(N+2-N)(2N+2) = -a_N \\ a_{N+4}(N+4-N)(2N+4) = -a_{N+2} \\ .... \\ a_{N=2k}(2k)(2N+2k) = -a_{N+2k-2} \end{array}\right\}$ k égalités.

En réduisant par transitivité ces k égalités on a : $a_{N=2k} = \frac{(-1)^K a_N}{2^K K! 2^K (N+1)(N+2)...(N+K)} = \frac{(-1)^K N! a_N}{2^{2K} K!(N+K)!}$.

Mais il reste à déterminer la valeur de a_N correspondant à la solution particulière de (B_N) qu'est J_N. Pour cela on va utiliser les propriétés démontrées dans la partie (A). En effet d'après les propriétés des séries entières (revoyez votre cours mon vieux ! au lieu de rester comme une moule béante !) $a_N = \frac{J_N^{(N)}(0)}{N!}$; De plus d'après la partie (A) : $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$ et $J"_0(0) = -\frac{1}{2}$; donc d'après **(A-5.c)** en dérivant par rapport à x et faisant x=0 : $J_1'(0) = -J"_0(0) = \frac{1}{2}$; De plus en dérivant N-1 fois les deux membres de la relation obtenue en **(A-5.a)** on a : $2J_N^{(N)}(x) = J_{N-1}^{(N-1)}(x) - J_{N+1}^{(N-1)}(x)$ et comme $J_{N+1}^{(N-1)}(0) = 0$ (son terme de plus bas degré étant en x^{N+1}, on en déduit : $J_N^{(N)}(0) = \frac{1}{2}J_{N-1}^{(N-1)}(0)$ et par transitivité sur les N égalités : $\begin{cases} J_1'(0) = \frac{1}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_N^{(N)}(0) = \frac{1}{2}J_{N-1}^{(N-1)}(0) \end{cases}$ on déduit que $J_N^{(N)}(0) = \frac{1}{2^N} = N!a_N$ donc $a_N = \frac{1}{2^N N!}$ et enfin $\boxed{\mathbf{a_{N+2k} = \frac{(-1)^k}{2^{N+2k}k!(N+k)!}}}$

On remarque qu'on peut aussi écrire $a_{N+2k} = \frac{C_{N+2k}^k}{2^{N+2k}(n+2k)!}$.

PARTIE C

C-8 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b \mathbf{f(t)\cos(xt)dt}$ **?** La limite est 0 d'après le Lemme de LEBESGUE qu'on démontre pour les fonctions plier, puis en escalier, puis pour les fonctions intégrables. Donnons ici une démonstration directe puisque f est C_1 ; On intègre par parties $\begin{cases} u = f \\ dv = \cos(xt)dt \end{cases} \Bigg| \begin{array}{c} du = f'(t)dt \\ v = \frac{\sin(xt)}{x} \end{array}$; par conséquent : $\| \int_a^b f(t)\cos(xt)dt\| = \| \left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt\| \leq 2\frac{\|f\|}{x} + \frac{\|f'\|(b-a)}{x}$ qui tend bien vers zéro quand x tend vers plus l'infini.

C-9.a **limite en x infini de $\mathbf{J_0(x)}$?** Le changement de variable $\sin\theta = t$ conduisant à une intégrale impropre en t=1, pour lequel le théorème précédent ne s'applique pas, aussi on SCINDE en utilisant CHASLES : $\pi J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta = 2\int_0^c \cos(x\sin\theta)d\theta + 2\int_c^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta$ on peut choisir $c < \frac{\pi}{2}$ de sorte que la seconde intégrale soit inférieure à ε donné > 0. Alors le changement de variable $\sin\theta = t$ transforme la première en $2\int_0^{Arcsin(c)} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini. C.q.f.d.

C-9.b **Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty}\mathbf{J_1(x)dx}$:** D'après **(A-5.c)** $J_1(x) = -J_0(x)$ et donc $\int_0^X J_1(t)dt = -J_0(X) + J_0(0) \to 1$. $\boxed{\int_0^{\mathbf{X}} \mathbf{J_1(t)dt = 1}}$.

C-10b **Transformée de LAPLACE de $\mathbf{J_0(x)}$:** La première formule résulte de la formule d'EULER appliquée à $\cos(x\sin\theta)$ et de la permutation des intégrations grâce au théorème de FUBINI. La première intégrale double vaut :

$$\int_0^\pi \left[\frac{e^{-\lambda x - ix\sin\theta}}{-\lambda - i\sin\theta}\right]_0^\infty d\theta = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\lambda^2+\sin\theta} =_{(\text{symétrie par rapport à } \frac{\pi}{2})} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\lambda^2(1+\tan^2\theta)+\tan^2\theta}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{\lambda^2(1+u^2)+u^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{du}{\lambda^2+(1+\lambda^2)u^2}$$

$$= \frac{2}{1+\lambda^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}+u^2} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}\left[Arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

D'o $\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-\lambda x}J_0(x)dx = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}}}$.

Vidiani M1 Carnot