nom :

sp M1 carnot DIJON

Problème classique, et bien guidé, la numérotation est en outre en continu, ce qui est agréable.

Ce problème porte sur une SPIRALE DE CORNU (Marie Alfred ORLEANS 6.3.1841 - PARIS 12.4.1902) : Jacques BERNOUILLI, le premier montra comment construire cette courbe, CORNU la retrouva dans des problèmes de diffraction et CÉSARO l'étudia ensuite. Cette courbe intervient en théorie de la diffraction, et dans les bretelles d'autoroute (négocier une courbe à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante).

J'ai utilisé une photocopie de la courbe, je ne sais pas si cela vaut le coup (voir QUERCIA) d'inclure en postscript le tracé en MAPLE ?

BIBLIOGRAPHIE VIDIANI sur les SPIRALES DE CORNU ou CLOTHOÏDE

Revue du palais de la découverte numéro spécial 45 décembre 95, réédité de 1976 page 10 et 110 ; Dictionnaire EDM 172 D page 565 ; BROCARD et LEMOINE courbes remarquables (Blanchard éditeur 1967) page 224 ; Malecot un problème de mécanique 1961, sur l'herpolodie ; F le lionnais les grands courants de la pensée mathématique c'est aussi une projection d'hélice conique ; Dictionnaire russe math slovar 1988 page 294 et son portrait page 703 ; TD info en pascal ; Dictionnaire Bouvier PUF page 202 ; Dictionnaire Eyrolles page 158 ; Parodi fonctions de variables complexes (SEDES 1968 l'année phare) pages 129-130, Intégrales de FRESNELS ; Bruhat chapitre 10 sur la diffraction ; Angot complément de math pour la physique figure page 34 ; Francisco GOMES TEIXEIRA traité des courbes spéciales remarquables (éditions Jacques Gabay réédité 1995) tome II pages 102-110 ;

I CONSTRUCTION DE Γ

I-1 **X et Y sont de classe infinie, parité, symétrie :** X et Y, intégrales de la borne supérieure de fonctions C^{∞}, le sont aussi car leur dérivées le sont : par exemple $X'(t) = \cos t^2$.

De plus le changement de variable t=-u, donne X(-t)=-X(t) et Y(-t)=-Y(t), X et Y sont impaires et Γ est symétrique par rapport au point O.

I-2 **X et Y ont des limites finies en t = ∞ :** Par exemple un changement de variable $v = u^2$ dans l'intégrale de X donne: $X(t) = \int_0^{t^2} \cos v \frac{dv}{2\sqrt{v}}$. $\Big($ Cette dernière intégrale converge en 0, car en 0 la fonction sous le signe somme est équivalente à $\frac{1}{2\sqrt{v}}$, dont l'intégrale (de RIEMANN avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), et que les intégrales de deux équivalents de signe constant au voisinage de 0, sont de mme nature $\Big)$.

Une intégration par parties sur la derniere intégrale de X donne : $\left\{\begin{array}{c} U = \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ dV = \cos v dv \end{array}\right| \begin{array}{c} dU = \frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}} dv \\ V = \sin v \end{array}$ et ainsi $X(t) = \left[\frac{\sin v}{2\sqrt{v}}\right]_0^{t^2} - \int_0^{t^2} \frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}} \sin v dv$; La derniere intégrale a une limite à l'infini, car la fonction sous le signe somme est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}}$ dont l'intégrale de RIEMANN converge en l'infini.

On procède de mme pour Y(t) : L'arc Γ a donc un POINT ASYMPTOTE K.

I-3 **Tableaux de variations de X et Y :** Comte tenu des parités constatée en **(I-1)** on se limite à t positif. Comme $X'(t) = \cos t^2$ et $Y'(t) = \sin t^2$ les tableaux de variation sont immédiats :

t	$....\sqrt{2n\pi}$		$\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$		$\sqrt{2n\pi + \pi}$		$\sqrt{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$		$\sqrt{2n\pi + 2\pi}$
$X'(t)$	 1	+	0	−	−1	−	0	+	1
$Y'(t)$	 0	+	1	+	0	−	−1	−	0
$X(t)$	....	↗		↘		↘		↗	
$Y(t)$	....	↗		↗		↘		↘	

Les valeurs n'ont pas été mises, car ce sont des intégrales dont la borne supérieure est t, que nous ne savons pas calculer exactement. (par exemple $\cos u^2$ n'a pas de primitive calculable au moyen de fonctions usuelles : voir Image des math 95, ENS 94, Th de LIOUVILLE, Algorithme de RISCH.

I-4 **Interpr2ter F(t) :** D'après CHASLES sur les intégrales, nous reconnaissons que $F(t) = (X(\infty) - X(t))^2 + (Y(\infty) - Y(t))^2 = KM^2$ c'est le carré de la distance de M au point asymptote K.

F somme de carrés de fonction de classe infinie est elle mme de classe infinie. En dérivant par rapport à la borne inférieure on a : $F'(t) = -2\cos t^2 \int_t^{+\infty} \cos u^2 du - 2\sin t^2 \int_t^{+\infty} \sin u^2 du = -2\int_t^{+\infty} \cos(t^2 - u^2) du$ et on a bien la formule annoncée en faisant le changement de variable $v = u^2 - t^2$ (t considéré comme constant), et en n'oubliant pas de changer les bornes !

$\int_0^\pi \mathbf{f(u)}\cos \mathbf{u}\mathbf{du} > \mathbf{0}$: f étant strictement décroissante, pour $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$ on a $f(\pi) \leq f(u) \leq f(\frac{\pi}{2})$
I-5.a et comme $\cos u$ est négatif sur cet intervalle, on a $f(\frac{\pi}{2})\cos u \leq f(u)\cos u \leq f(\pi)\cos u$, et en intégrant, comme l'égalité n'a pas lieu partout et que les fonctions sous le signe somme sont continues, on a par positivité de l'intégrale des fonctions continues : $-f(\frac{\pi}{2}) < I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(u)\cos udu < -f(\pi)$; mais de mme $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cos udu > \frac{\pi}{2}$, donc $I_1 + I_2 > 0$.

Nature de la série $\sum u_n$: u_n est du signe de $(-1)^n$, donc elle est alternée, de plus le changement de
I-5.b+c 1-6 variable $v = n\pi + s$ donne $u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\cos s}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}}ds$ qui montre immédiatement que $|u_n|$ est strictement décroissnte. La série proposée vérifie le CRITÈRE SPÉCIAL des séries alternées est donc convergente.

■ D'après CHASLES, comme l'intégrale I converge on a : $I(2p+1) = \int_0^{(2p+1)\pi} \frac{\cos s}{\sqrt{\alpha+n\pi+s}}ds = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + ... + (u_{2p} + u_{2p+1})$; Comme chaque parenthèse est strictement positive et que l'intégrale tend en croissant

vers sa llmite (puisque $I(2p+3) = I(2p+1) + (u_{2p} + u_{2p+1})$, on a bien I strictement positive ; Le faire directement sur l'intégrale généralisée est dangereux, une série, non absolument convergente, n'étant pas nécéssairement ASSOCIATIVEMENT convergente !

■ Comme $F'(t) < 0$ on en déduit que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour **(1-6)** on suit exactement le mme plan.

Point double ? Γ ne peut admettre de point double, en effet F étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ on en
I-7 déduit que si $t < t'$ on a $F(t') < F(t)$ donc $\|KM(t')\| < \|KM(t)\|$; on ne peut avoir un point double car cela entraine $M(t') \neq M(t)$.

Point d'inflexion : Son paamètre est déterminé par $M'(t)$ et $M"(t)$ sont liés : soit $X'(t)Y"(t) - X"(t)Y'(t) = 0$
I-8 $\Longleftrightarrow \cos t^2(2t\cos t^2) + (2t\sin t^2)\sin t^2 = 2t = 0$.

$\boxed{\textbf{l'origine est le seul point d'inflexion de } \mathbf{\Gamma}}$.

La représentation de γ est ci contre.
I-9

II ÉTUDE MÉTRIQUE DE Γ

Abcisse curviligne : Orientant la courbe, dans le sens des t croissants et en prenant O comme origine on
II-10
a $ds^2 = (X'^2(t) + Y'^2(t))dt^2 = ((\cos t^2)^2 + (\sin t^2)^2)dt^2 = dt^2$ donc ds=dt et $\boxed{\mathbf{s=t}}$.

Rayon de courbure : Les formules $dX = \cos t^2 dt = ds\cos\varphi$ et $dY = \sin t^2 dt = ds\sin\varphi$, montreent qu'avec
II-11
les notations qui sont données dans **(II-12.a)** $R = \frac{ds}{d\varphi}$, on a : $\boxed{\mathbf{R = \frac{1}{2t}}}$.

Courbes d'équation intrinséque 2Rs=1 : L'équation intrinsèque donnée s'écrit en effet : $2dss = d\varphi$.
II-12.a Et l'intégration de cette équation à variables séparés donne $\varphi = k + s^2$.
À une rotation près de l'axe des x on peut prendre k=0 ;

Finir de déterminer γ : Après cette rotation, les formules $dx = ds\cos\varphi$ et $dy = ds\sin\varphi$, s'écrivent
II-12.b $dx = ds\cos s^2,\ dy = ds\sin s^2$ et l'intégration membre à membre après le choix d'une constante d'intégration nulle (ce qui revient à un changement d'origine du repère, donc à une translation de γ), on trouve Γ à un déplacement près.