I - 1. • Supposons que f soit cyclique : soit x_0 tel que $b = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base ;

alors $f^n(x_0)$ se décompose dans b : $f^n(x_0) = -a_0x_0 - a_1f(x_0) - \cdots a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$;

et la matrice de f dans b est donc : $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

• Réciproquement : supposons que la matrice de f dans la base $(e_i)_{[1,n]}$ soit C.

Alors $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ \dots, f(e_{n-1}) = e_n$; d'où $e_2 = f(e_1),\ e_3 = f^2(e_1),\ \dots, e_n = f^{n-1}(e_1)$; la famille $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est donc une base de E ; on en déduit que f est cyclique.

I - 2. J'effectue l'opération élémentaire : $L_1 \longleftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_n$ dans le déterminant de la matrice $C - XI_n$; on a donc :

$$P_c = \det(C - XI_n) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 - a_1X - \cdots - a_{n-1}X^{n-1} - X^n \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

et je développe ce dernier déterminant par rapport à sa première ligne :

$$P_C = (-1)^{n+1}(-X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0). \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -X \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^nQ$$

On conclut : $\boxed{P_C = (-1)^nQ}$

• Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est unique ; d'autre part, d'après l'égalité précédente, les coefficients de la matrice compagne de l'endomorphisme cyclique f sont déterminés à partir de P_f ;

d'où l'unicité de la matrice compagne d'un endomorphisme cyclique donné.

I - 3. • Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ (en particulier si λ est valeur propre de C), la sous-matrice de $C - \lambda I$ formée des lignes $2, \dots, n$ et des colonnes $1, \dots, n-1$ est inversible (son déterminant est 1) ; le rang de $C - \lambda I$ est donc $n - 1$. Donc les sous-espaces propres de C sont tous de dimension 1.

• On vérifie que, pour λ valeur propre de C, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1 \\ \lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \cdots + a_2 \\ \vdots \\ \lambda + a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de C pour la valeur propre λ ;

ce vecteur engendre donc $E_C(\lambda)$.

II - 4. x_0 désignera un élément vérifiant $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ (on suppose l'existence d'un tel élément).

• On va prouver que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre :
on part d'une combinaison linéaire nulle : $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$;
et on en prend successivement l'image par $f^{n-1}, f^{n-2}, \dots, f, I$; d'où $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$;
donc $\underline{f \text{ est cyclique}}$.

• La matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est la matrice compagne de f : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Le rang de J_n est $n-1$; la dimension du noyau de f est donc 1 (voir également la question **I - 3.**).

II - 5. On posera, pour tout $j \in \mathbf{N}$, $N_j = \operatorname{Ker} f^j$ et $n_j = \dim N_j$.

a) La suite $(N_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante : pour tout x, si x appartient à N_k, alors x appartient à N_{k+1}.
D'autre part, si x appartient à N_{k+1}, alors $f^k(f(x)) = 0$; on en déduit donc que $\underline{f(N_{k+1}) \subset N_k}$

b) $\operatorname{Ker} \varphi$ est l'ensemble des $x \in N_{k+1}$ qui vérifient $f(x) = 0$; d'où $\underline{\operatorname{Ker} \varphi = N_1}$.
Donc : $\operatorname{rang} \varphi = \dim N_{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \varphi = n_{k+1} - 1 \leq \dim N_k = n_k$; d'où $\underline{n_{k+1} \leq 1 + n_k}$.

c) La suite (n_j) est croissante (car $N_j \subset N_{j+1}$).
Supposons que, pour un entier j, n_j soit égal à n_{j+1} ; on a donc $N_j = N_{j+1}$;
soit $x \in N_{j+2}$; alors $f^{j+2}(x) = 0 = f^{j+1}(f(x))$, donc $f(x) \in N_{j+1} = N_j$; donc $f^j(f(x)) = 0$, c'est à dire que x appartient à N_{j+1} ;
on en déduit que $N_{j+2} \subset N_{j+1}$, donc $N_{j+2} = N_{j+1}$.
On conclut : pour tout j, si $n_j = n_{j+1}$, alors $n_{j+1} = n_{j+2}$; l'égalité $n_k = n_{k+1}$ implique donc que, pour tout $j \geq k$, $n_j = n_k$.
La suite (n_i) est donc croissante, et devient stationnaire dès que deux termes successifs sont égaux.

• On a $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.
En appliquant ce qui précède on obtient, avec l'hypothèse $n_1 = 1$: $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_{p-1} < n_p = n$;
avec, de plus, pour tout i de $[1, p-1]$, $n_{i+1} \leq 1 + n_i$.
Donc, pour tout i de $[1, p]$, $n_i = i$; d'où $n_p = p = n$.
Conclusion : $\boxed{p = n, \text{ et, pour tout } k \in [0, n],\ n_k = k.}$

III - 6. f est supposé cyclique : soit x_0 tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E ;
si $\alpha_0 I + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$ est une combinaison linéaire nulle de $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$; en prenant l'image de x_0, on obtient $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$; d'où l'on déduit que les α_i sont tous nuls ;
donc : $\underline{f \text{ cyclique} \Longrightarrow (I, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre}}$.

III - 7.a) Les endomorphismes f et $(f - \lambda_k)^{m_k}$ commutent, donc E_k noyau de $(f - \lambda_k I)^{m_k}$ est stable par f.
Les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$, pour $1 \leq k \leq p$, sont deux à deux étrangers ; le théorème de décomposition des noyaux permet donc de conclure que $\operatorname{Ker} P_f(f) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, avec $P_f(f) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton ; donc $\underline{E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$

b) $\varphi_k^{m_k}$ est l'endomorphisme nul de E_k : en effet, pour tout x de E_k, $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k I)^{m_k}(x) = 0$.

• Je désigne par f_k l'endomorphisme de E_k induit par f.
Le polynôme $(X - \lambda_k)^{m_k}$ appartient à l'annulateur de f_k ; le spectre de f_k est donc réduit à $\{\lambda_k\}$.
On en déduit que le polynôme caractéristique de f_k est : $P_{f_k} = (\lambda_k - X)^{\dim E_k}$.
L'égalité $E = \oplus E_k$ implique que le polynôme caractéristique de f est $P_f = \prod_k (\lambda_k - X)^{\dim E_k}$.

En comparant à la définition de P_f : $P_f = \prod_k (\lambda_k - X)^{m_k}$, on conclut : pour tout k, $\underline{\dim E_k = m_k}$.

• Supposons que $\varphi_k^{m_k - 1} = 0$. Alors le polynôme $Q = (\lambda_k - X)^{m_k - 1} \prod_{i \in [1,p] \setminus \{k\}} (\lambda_i - X)^{m_i}$ appartiendrait à l'annulateur de f ; or le degré de Q est $n-1$;
on en déduirait donc une relation de dépendance pour la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ (il suffit pour cela d'écrire $Q(f) = 0$) ce qui est contraire à l'hypothèse ; conclusion : $\underline{\varphi_k^{m_k - 1} \neq 0}$.

c) On peut donc appliquer à φ_k le résultat de **II-4.** : il existe une base de E_k dans laquelle la matrice de φ_k est $J_{m_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre $m_k = \dim E_k$.

Dans cette base, f_k est représentée par la matrice $\lambda_k I_{m_k} + J_{m_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

d) Soit M la matrice compagne du polynôme caractéristique P_f de f, et g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est M ;
d'après la première question, g est cyclique, et, d'après la seconde question, $P_g = P_f = P_M$.

• g étant cyclique, la famille $(I, g, g^2, \dots, g^{n-1})$ est libre ; on peut donc appliquer les questions **7. a**, **b** et **c** : il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice M' de g est diagonale par blocs, de blocs diagonaux : $\lambda_k I_{m_k} + J_{m_k}$ (étant donné que $P_g = P_f = \prod(\lambda_k - X)^{m_k}$).

• M et M' sont semblables (elles représentent le même endomorphisme g).
M est cyclique ; donc M' est cyclique ; or M' est la matrice de f dans B ; on conclut que f est cyclique.

III - 8. a) • Soit $\psi(\lambda) = \det(Q_1 + \lambda Q_2)$. ψ est un polynôme à coefficients réels, vérifiant $\psi(i) = \det Q \neq 0$.
ψ n'est donc pas le polynôme nul ; il existe donc un réel λ_0 tel que $\psi(\lambda_0)$ soit non nul.

• $A = QBQ^{-1}$; d'où $AQ = QB$, c'est à dire : $A(Q_1 + iQ_2) = (Q_1 + iQ_2)B$, avec A, B, Q_1, Q_2 matrices à coefficients réels ; donc $AQ_1 = Q_1 B$ et $AQ_2 = Q_2 B$.
On en déduit que $A(Q_1 + \lambda_0 Q_2) = (Q_1 + \lambda_0 Q_2)B$; la matrice $P = (Q_1 + \lambda_0 Q_2)$ appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ car son déterminant égal à $\psi(\lambda_0)$ est non nul, et ses coefficients sont réels ; d'autre part, on a $A = PBP^{-1}$.

Donc : si A et B, à coefficients réels, sont semblables sur $\mathbf{C}$, elles le sont sur $\mathbf{R}$.

b) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E tel que la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ soit libre.
Son polynôme caractéristique est noté $P_f = (-1)^n (X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0) \in \mathbf{R}[X]$.
Soit M la matrice de f dans la base canonique de E ; on peut lui appliquer le résultat de la question **7**, en la considérant comme matrice à coefficients complexes :
$(I, M, \dots, M^{n-1})$ est une famille libre ; M est donc cyclique, et il s'ensuit, d'après la question **1.**, que M est semblable sur $\mathbf{C}$ à la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Les deux matrices M et C sont à coefficients réels et sont semblables sur $\mathbf{C}$; d'après la question **8. a**, on peut affirmer qu'elles sont semblables sur $\mathbf{R}$; il existe donc une base b' telle que $\mathrm{Mat}_{b'} f = C$; donc f est cyclique.
Conclusion : que le corps de base soit $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on a l'équivalence :

$$\boxed{f \text{ est cyclique} \iff (I, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

IV - 9. a) On montre aisément que, pour tout $i \in [0, n-1]$, $g(f^i(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(f^i(x_0))$; on en conclut que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ (en effet ces deux endomorphismes coïncident sur une base).

b) Il est clair que $\mathbf{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$, et le résultat précédent donne l'inclusion réciproque.
Mieux : d'après **a)**, si g appartient à $\mathcal{C}(f)$, il existe $R \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.
On a unicité de R : l'égalité $R_1(f) = R_2(f)$, avec R_1 et R_2 polynômes de degrés $\leq n-1$, implique que $R_1 = R_2$ (car $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre).

Donc : si f est cyclique, le commutant de f est de dimension n, égal à $\mathbf{K}_{n-1}[X]$.

IV - 10. • f étant un endomorphisme quelconque de E, on montre que la dimension de $\mathbf{K}[f]$ est $\leq n$:
soit A un élément quelconque de $\mathbf{K}[X]$; j'effectue la division euclidienne de A par P_f : $A = P_f.Q + R$ avec R de degré $\leq n-1$;
on a donc $A(f) = P_f(f) \circ Q(f) + R(f) = R(f)$ ($P_f(f)$ est nul par le théorème de cayley-Hamilton) ;
on peut donc affirmer que $A(f)$ appartient au sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
On en déduit : Conclusion : $\underline{\mathbf{K}[f] \subset \mathbf{K}_{n-1}[f] \text{ est de dimension } \leq n}$.

• D'autre part, on a l'inclusion $\mathbf{K}_{n-1}[f] \subset \mathcal{C}(f)$, et l'énoncé donne : $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$.

• De ce qui précède on déduit que, si $\mathcal{C}(f) = \mathbf{K}[f]$, alors $\mathbf{K}[f] = \mathbf{K}_{n-1}[f]$ qui est de plus de dimension n ; donc $(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } \mathbf{K}[f] = \mathcal{C}(f)}$

V - 11. **a)** On a $f^p(x_0) = x_0$; donc, pour tout $i \in [0, p-1]$, $f^p(f^i(x_0)) = f^i(x_0)$.
Les endomorphismes f^p et I coïncident sur une base ; on en déduit que $\underline{f^p = I}$.

b) $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide d'entiers, majoré par $n = \dim E$; $\mathcal{E}$ admet donc un plus grand élément $m \leq n$).

c) • Par définition de m, $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une famille libre
et la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée.
On en déduit que $f^m(x_0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$;
d'où, par récurrence sur k : pour tout $k \geq m$, $f^k(x_0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.

• On a donc : pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$;
or $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E ;
on conclut que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.
Conclusion : $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E, donc $\underline{f \text{ est cyclique, et } m = n = \dim E}$.

• $X^p - 1$, polynôme scindé de racines simples appartient à l'annulateur de f ; f est donc diagonalisable.
D'autre part, il a été établi (question **3**) que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1 ; on en conclut que $\underline{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

V - 12. D'après ce qui précède, $b = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

La matrice compagne de f est donc $C = \mathrm{Mat}_b f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $C.U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega^k U_k$ donc $\boxed{U_k \text{ est vecteur propre de } C \text{ pour la valeur propre } \omega^k}$

V - 13. • Si z est racine n-ème de l'unité, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k = \begin{cases} n & \text{si } z = 1 \\ z\dfrac{1-z^n}{1-z} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

• Soit $\alpha_{r,s}$ le terme général de $M.\overline{M}$:

$$\alpha_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} m_{r,k}\overline{m}_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}^{rk}\omega^{ks} = \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{s-r}\right)^k = \begin{cases} n & \text{si } \omega^{s-r} = 1, \text{ c'est à dire si } r = s, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\underline{M.\overline{M} = nI}$, d'où : $\underline{M \text{ est inversible, avec } M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}}$.

V - 14 • D'après la question **12**, $\underline{C \text{ admet } n \text{ valeurs propres : } \omega^k, \text{ pour } k = 1 \ldots n,}$
$\underline{\text{et les vecteurs } (U_1, \ldots, U_n) \text{ constituent une base de vecteurs propres.}}$

(La question **13** permet de prouver directement que $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base ; en effet M est la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$, de $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$.)

• D'autre part, on vérifie aisément que $\underline{A = a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 + \cdots + a_{n-1}C^{n-1}}$

D'où, pour $k \in [1, n]$, $AU_k = \left(a_0 + a_1\omega^k + \cdots + a_{n-1}\omega^{k(n-1)}\right)U_k$.
Soit P le polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$; l'égalité précédente permet d'affirmer que

$$\boxed{\begin{array}{l} (U_1, \ldots, U_n) \text{ est une base propre pour } A, \text{ donc } A \text{ est diagonalisable,} \\ \text{les valeurs propres correspondant étant } P(\omega), P(\omega^2), \ldots, P(\omega^n). \end{array}}$$
