nom :

sp M1 carnot DIJON

Propriétés classiques de la TRACE, Base de Jordan, Equation du type LIE. Seule remarque dans III.3.a) l'existence de l'indice peut se faire avant la seconde demande.

L'énoncé guide bien. Problème classique tout à fait dans l'esprit du programme.

Concours ENSAI 96 mathématiques 1

PARTIE I

1.a) **Tr(AB)=Tr(BA) :** Si on pose C=AB alors avec les notations du cours $c_i^j = \sum_{k=1}^{n} b_i^k a_k^j$; donc $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_i^k a_k^i$; On permute les sommations et on a $Tr(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i b_i^k = Tr(AB)$.

1.b+c) $\mathbf{Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)}$**:** En effet d'après le résultat précédent :

$$Tr(P^{-1}AP) = Tr((AP)P^{-1}) = Tr(A(PP^{-1})) = Tr(AI) = Tr(A).$$

La relation demandée en c) est une conséquence de b), puisqu'elle est vraie pour les matrices, une base étant choisie.

2.a) **Valeurs propres d'une matrice triangulaire :** C'est du cours, en écrivant le déterminant de A-tI qui est triangulaire, $\boxed{\textbf{Les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux } \mathbf{a_i^i}}$

2.b) **CNS u nilpotent :** Si $u^p = 0$ et si V est t propre : $0 = u^pV = t^pV = 0$ donc t=0, les valeurs propres de u sont nulles.

Réciproquement : si toutes les valeurs propres de A sont nulles, il existe une base o A est triangulaire stricte ; à chaque puissance $A, A^2, ..$ ont une parrallèle à la diagonale principale, nulle supplémentaire. Donc $A^n = 0$.

On peut aussi dire que comme toutes les valeurs propres de A sont nulles, son polynôme caractéristique est $(-X)^n$: d'après le théorème de CAYLEY $(-A)^n = 0$. A est nilpotent.

3.a) **Déterminant de VANDERMONDE :** C'est du cours (revoyez votre cours mon vieux !) on procède par récurrence et la méthode polynomiale.

3.b) **Si $Tr(u^k) = 0$ u est nilpotent :** Soit $m_i \geq 1$ la multiplicité de la valeur propre non nulle t_i ; en exprimant la trace des matrices A^k k=1...; on a le système : $\begin{cases} m_1t_1 + ...m_pt^p = 0 \\ m_1t_1^2 + ... + m_pt_p^2 = 0 \\ .... \\ m_1t_1^p + ... + m_pt_p^p = 0 \end{cases}$

Ce système est cramérien en $m_1, ..., m_p$ car son déterminant est $t_1...t_pV(t_1, ..., t_p) \neq 0$, or les m_i ne sont pas nulles, donc l'hypothèse que les valeurs propres ne sont pas toutes nulles est absurde et d'après **(2.b)** A est nilpotente.

PARTIE II

1) **Relier $\mathbf{u^2}$ u Tr(u) et det(u) :** CAYLEY donne $\boxed{\mathbf{u^2 - Tr(u)u + det(u) = 0}}$

2) **u n'est pas inversible :** S'il l'était en multipliant à gauche la relation uv-vu=u par u^{-1}, on aurait $v - u^{-1}vu = I$; En prenant la trace des deux membres on aurait 0=Tr(I)=2. Donc det(u)=0, mais comme aussi Tr(u)=0 car Tr(u)=Tr(uv-vu)=0, on a donc $\boxed{\mathbf{u^2 = 0}}$

3.a) **Existence d'une base de JORDAN pour u :** Comme $u^2 = 0$ on a $Im(u) \subseteq Ker(u)$; Comme u est non nul, Ker(u) est strictement inclus dans E. Comme det(u)=0, Ker(u) n'est pas réduit à 0, donc Ker(u) est une droite vectorielle ; soit V un vecteur qui n'est pas dans Ker(u), alors u(V) n'est pas nul et est indépendant de V (l'image par u d'une relation rV+su(V)=0 donnerait ru(V)=0 r=0 puis u=0) ; La base B =(u(V),V) convient.

3.b) **Forme de la matrice de v :** On procède par la méthode des coefficients indéterminés : Cherchons v sous la forme $v = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, alors la condition uv-vu=u se traduit matriciellement par :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; soit en identifiant les deux membres r=0, s=p+1 ; la matrice de v est bien de la forme indiquée avec $\lambda = p\ a = q$.

3.c) **Existence d'une base o u et v sont simultanément diagonales :** On garde $e_1 = u(e_2)$ et on essaie de trouver $e_2' = e_2 + ke_1$; (e_1, e_2') est toujours une base de E, car déduite de la précédente par transformation élémentaire. On a toujours $u(e_2') = e_1 + 0$ et $v(e_1) = \lambda e_1$; On veut choisir k pour que $v(e_2') = v(e_2) + kv(z_1) = ae_1 + (\lambda+1)e_1 + k\lambda e_1$ soit égal à $(\lambda+1)e_2' = (\lambda+1)e_2 + (\lambda+1)ke_1$; le choix k=a convient.

4.a+b) **Forme de la matrice de w :** Comme uv-vu=u et uw-wu=u par différence (théorème de structure des solutions d'une équation linéaire) on a u(w-v)-(w-v)u=0 ; et on procède par la méthode des coefficients indéterminés en cherchant w-u sous la forme matricielle $w - u = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$: on a l'équation : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; soit en identifiant les deux membres : $\begin{pmatrix} r & s-p \\ 0 & -r \end{pmatrix}$ r=0 s=p et ainsi $w = v + \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ $w = v + pI + qu$; cqfd

---

5) **Résoudre xv-vx=x :** Toujours par la méthode des coefficients indéterminés sur la base B' on a : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$; soit :

$(\,\lambda p \quad q(\lambda+1)crr\lambda \quad s(\lambda+1)\,)\begin{pmatrix} \lambda p & q\lambda \\ r(\lambda+1) & s(\lambda+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ ou encore

$\begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ et par identification p=0, r=0 s=0 ; x est proportionnelle à u : **x=qu**

PARTIE III

1) **calculer $u^kv - vu^k$:** J'appelle HR(k) l'hypothèse de récurrence numéro k (vérifiée pour k=1 par hypothèse) : $u^kv - vu^k = ku^k$ que je suppose réalisée ; Montrons en le transfert à l'ordre k+1, nous signalons dans la démonstration, en indice du signe = la justification du membre de droite :

$u^{k+1}v =_{associativite} u(u^kv) =_{HR(k)} u(vu^k + ku^k) = uvu^k + ku^{k+1} =_{HR(1)} (vu+u)u^k + ku^{k+1} = vu^{k+1} + (k+1)u^{k+1}$. Ce qui est bien la propriété HR(k+1).

---

2) **u est nilpotent :** : Si aucun des u^k n'était nul, l'endomorphisme de L(E), de dimension finie n^2, défini par (v fixé) L(u)=uv-vu, aurait une infinité (k+1 k=1....) de valeurs propres distinctes, ce qui est absurde, un tel endomorphisme ayant au maximum $n^2 = dim(L(E))$ valeurs propres.

3.a) **Suite des noyaux itérés :** *(littéraires serait étérées !)* Si $x \in Keru^k \Longrightarrow u^k(x) = 0 \Longrightarrow u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = 0 \Longrightarrow x \in Keru^{k+1}$. Comme de plus dim(E)=n finie, la suite des noyaux itérés, ne peut tre constamment strictement croissante, puisque leur dimension augmenterait au moins de 1 à chaque incrémentation de k, donc il existe un rang p tel que $Keru^p = Keru^{p+1}$;

Montrons que la suite des noyaux itérés de u se stabilise à partir de ce rang : Supposons que l'on sache que $Keru^{q+1} = Keru^q$ (ce qui a lieu pour q=p) ; On sait déja que $Keru^{q+1} \subseteq Keru^{q+2}$, montrons l'inclusion inverse : soit $x \in Keru^{q+2}$ alors $0 = u^{q+2}(x) = u^{q+1}(u(x))$, donc $u(x) \in Keru^{q+1} = Keru^q(x)$ par conséquent $u^{q+1}(x) = u^q(u(x)) = 0$ et on a bien l'inclusion inverse $Keru^{q+2} \subseteq Keru^{q+1}$ d'o la stabilité annoncée, et cela à partir du rang p.

3.b) **Si dim Ker u = 1, alors dimKeru$^{\mathbf{k}}$ = k :** En effet on a $u(Keru^{k+1}) \subseteq Keru^k$ et le noyau de la restriction de u à $Ker(u^{k+1})$ est inclus dans Ker(u), d'o l'inégalité : $dimKeru^{k+1} \leq dimKeru^k + 1$, en appliquant la formule du rang (car dim Ker u=1). Ceci montre que la suite $(dimKeru^k)$ augmente de 1 tant qu'elle est strictement croissante. Finalement $dimKeru^k = k$ pour k=1..p et $dimKeru^k = p$ pour $k \geq p$. La seule possibilité est p=n.

4.a) **Existence de x_0 pour avoir une base du type B :** Il suffit de prendre d'après le résultat précédent $x_0 \in E - Ker(u^{n-1})$. La méthode des images itérés, donne bien leur indépendance, et comme tout espace de dimension n peut tre engendré par n vecteurs indépendants qui forment une nouvelle base, B est bien une base de E.

4.b) **Donner une base de $\mathbf{Keru^k}$:**

Il est immédiat, d'après sa dimension k que $\boxed{\left(\mathbf{u^{n-1}(x_0)}, ..., \mathbf{u^{n-k}(x_0)}\right)}$ convient.

4.c) **$\mathbf{Keru^k}$ est stable par v :** La relation obtenue en **III.1)** donne si $x \in Keru^k$: $u^k(v(x)) = v(u^k(x)) + ku^k(x) = 0$; D'o la stabilité de $Keru^k$ par v.

Comme les vecteurs de base de B sont dans l'ordre des vecteurs de base des $Keru^k$, la matrice de v sur cette base est TRIANGULAIRE supérieure.

5.a+b) **Matrice de u dans B :** Comme $(u(e_1)) = 0$ et que pour i=2..n $u(e_i) = e_{i-1}$, la matrice de u sur la bae B est la matrice de JORDAN : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer v, trois solutions sont possibles :

Première solution : La méthode des coefficients indéterminés. Il suffit de rechercher V telle que VJ-VJ=J : cela marche bien, est élémentaire, mais calculatoire.

Deuxième solution : Chercher les images des vecteurs de base par v : on suppose que $v(x_0)$ est connu sur la base B : $v(x_0) = a_1e - 1 + ... + k_ne_n$, alors la relation obtenue en **III 2)** $v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0)) - ku^k(x_0)$, permet de proche en proche en partant de k=1, d'avoir les images par v des vecteurs de la base B, donc d'avoir la matrice V.

Troisième solution : Nous préférons **M1** la solution suivante : v_0 est une solution évidente *(Il faut toujours lire l'énoncé en entier, conseil que vos professeurs vous toute l'année, et que comme une brèle irlandaise, vous n'appliquez pas !)*, donc d'après le principe de structure des solutions d'une équation linéaire (en v) on a $v = v_0 + z$ o z est la solution de l'équation homogène associée : uz-zu=0 donc fait partie du commutant de J ; Or il est classique (et immédiat à retrouver) que le commutant de J est $Vect(I, J, ..., J^{n-1})$ donc $v = v_0 + a_{1,1}I + a_{1,2}J + ... + a_{1,n}J^{n-1} = v_0 + P(J)$.

5.c) **Déterminer u à n-1 contantes près** v_0 ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable sous la forme indiquée. Quand D est une matrixe diagonale $D = Diag(x_1, ..., x_n)$, pour toute matrice $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le terme général de UD-DU est $x_ju_{i,j} - u_{i,j}x_i = u_{i,j}(x_j - x_i)$; Comme on veut que UD-DU=U on doit avoir pour tous i et j $u_{i,j}(j - i - 1) = 0$ (puisqu'ici D=V et $x_i = i - 1$. Les $u_{i,i+1}$ sont arbitraires, les autres sont nuls : et ainsi avec les matrices de base, sur la base o V est diagonalisée sous la forme V_0 on a : $\boxed{\mathbf{U} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{k_i E_i^{i+1}}}$

5) **Existence de u et v :** Posons $u = \alpha u_1 + \beta v_1$ alors $uv_1 - v_1u = (\alpha u_1 + \beta v_1)v_1 - v_1(\alpha u_1 + \beta v_1) = \alpha(u_1v_1 - v_1u_1) = \alpha(\alpha u_1 + \beta v_1) = \alpha u$: comme α n'est pas nul $v = \frac{v_1}{\alpha}$ convient.

Il suffit donc de prendre $\boxed{\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u_1} + \beta\mathbf{v_1} \quad v = \frac{v_1}{\alpha}}$.

Vidiani M1 Carnot