ENSAI 1996

1.

1.1. Pour des matrices, on a $\mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA)$ et donc la trace est invariante par changement de base, ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme indépendamment de la matrice qu'on lui choisit. La propriété

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E) \quad \mathrm{Trace}(u \circ v) = \mathrm{Trace}(v \circ u)$$

est évidemment conservée.

1.2.
a) Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les a_{ii} (termes diagonaux).
b) Si u est nilpotent, un polynôme de la forme X^p étant annulateur, toute valeur propre, étant racine de ce polynôme, est nulle.
Réciproquement (c'est plus délicat), **comme on est dans** $\mathbb{C}$ le polynôme minimal est scindé. Ses racines sont toutes nulles, donc c'est un X^p pour une certaine valeur de p.
Comme $\mu_u \mid P_u$, on peut même préciser $p \leqslant n$.
c) Définition classique d'un déterminant de Vandermonde. On remarque d'abord que c'est un polynôme en les a_i, qui est nul (caractère alterné du déterminant) dès que $a_i = a_j$ pour un $i \neq j$.
Donc ce polynôme est divisible par $a_j - a_i$**, pour tous les** $i < j$ et donc par leur produit (théorème de Gauss : ces facteurs sont premiers entre eux deux à deux). Écrivons

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).Q$$

Par comparaison des degrés, Q est une constante. Pour la déterminer, on cherche par exemple le coefficient de a_n^{n-1} : c'est

$$V(a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

ce qui prouve par récurrence (évident pour $n = 1, 2$!) que l'on a bien

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \;\; \mathrm{Trace}(u^k) = 0$.
Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, u est trigonalisable et dans une base adéquate on a :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \text{X} & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En calculant les puissances, on trouve le système d'équations

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad m_1 \lambda_1^k + \ldots + m_p \lambda_p^k = \mathrm{Trace}(u^k) = 0$$

où m_i désigne la multiplicité de la vp λ_i et où l'on a jeté les valeurs propres nulles (on va essayer d'aboutir à une contradiction !).
On peut se contenter des p premières équations : le déterminant du système (où les inconnues sont les m_i, pour changer !) est un Vandermonde, non nul d'après la question précédente. Donc le système a une solution unique et nulle, ce qui est ridicule (une multiplicité vaut 1 au minimum). Donc il n'y a pas d'autre vp que 0, c'est à dire que u est nilpotent.

La réciproque est triviale.

2. $n = 2$.

2.1. Par Cayley-Hamilton, on a immédiatement

$$u^2 = \text{Trace}(u)u - \det(u)\,\text{id}$$

Notons (E) la relation étudiée $u \circ v - v \circ u = u$.

2.2. Si u était inversible, on aurait

$$v - u^{-1} \circ v \circ u = \text{id}$$

d'où en prenant les traces $0 = \text{Trace}(v) - \text{Trace}(v) = \text{Trace}(\text{id}) = n$. Dur !
On a donc $u^2 = \text{Trace}(u).u$. Mais par le même argument, on a $\text{Trace}(u) = \text{Trace}(u \circ v - v \circ u) = 0$ et finalement

$$u^2 = 0$$

Dans la suite de cette partie, on suppose $u \neq 0$.

2.3.
a) On prend $e_2 \notin \ker u$ et $e_1 = u(e_2)$: cela fait une magnifique base B dans laquelle $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En effet, (e_1, e_2) est bien libre :

$$a.e_1 + b.e_2 = 0 \Rightarrow u(a.e_1 + b.e_2) = b.e_1 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$$

b) Commençons pour gagner du temps par montrer que e_1 est un vecteur propre de v : en appliquant (E), il reste que $u \circ v(e_1) = 0$, c'est à dire que $v(e_1) \in \ker(u)$ ou encore $v(e_1)$ est colinéaire à e_1. Ce qui règle son compte à la première colonne de $\text{Mat}_B(v)$. Notons $v(e_1) = \lambda e_1$.
Je m'obstine à refuser le calcul matriciel : il vient de même

$$u \circ v(e_2) - v(e_1) = u \circ v(e_2) - \lambda e_1 = u(e_2) = e_1$$

ce qui prouve que $u \circ v(e_2) = (1 + \lambda)e_1$. Or de façon générale $u(xe_1 + ye_2) = ye_1$, ce qui signifie que nous avons trouvé l'autre terme diagonal (le coin supérieur droit reste inconnu) et que l'on peut écrire :

$$\text{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

c) Pour annuler a, il suffit de modifier e_2 en $e'_2 = e_2 + a.e_1$, ce qui ne change pas la matrice de u $(u(e'_2) = e_1)$. Il vient

$$v(e'_2) = (1 + \lambda)e_2 + (a + a\lambda)e_1 = (1 + \lambda)e'_2$$

Maintenant v est diagonalisée.

2.4. Notons que w joue le même rôle que v.

a) La forme de la matrice de w dans la base B' est similaire à celle de v dans la base B ! c'est à dire que

$$\text{Mat}(w) = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & 1 + \mu \end{pmatrix} = \text{Mat}(v) + (\mu - \lambda)\,\text{id} + (b - a)\,\text{Mat}(u)$$

b) Réciproque claire (plus généralement, ajouter à v quelque chose (v') qui **commute** avec u, et donc qui a un « crochet » $u \circ v' - v' \circ u = 0$, redonne une solution de (E). En fait, ce n'est pas plus général, car tout endomorphisme qui commute avec u est, ici (comme on le voit matriciellement) un polynôme en u ...

2.5. Pour $x \circ v - v \circ x = x$, on trouve de façon similaire $x = k.u$, $k \in \mathbb{C}$ quelconque.

3. n quelconque !

Soient donc $v \in \mathcal{L}(E), u \in \mathcal{L}(E) \backslash \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

3.1. On devine et on prouve facilement que $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

3.2. La ruse bien venue consiste à observer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Trace}(u^k) = 0$; il en résulte (cf. partie I) que u est nilpotent.

3.3.
a) $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$: évident.
Supposons qu'il existe un entier p tel que $\ker u^p = \ker u^{p+1}$;
soit alors $x \in \ker(u^{p+2})$, on a $u(x) \in \ker(u^{p+1}) = \ker(u^p)$ et donc $u^p(u(x)) = 0$, d'où encore $u^p(x) = 0$: c'est prouver que $\ker(u^{p+2}) = \ker(u^p)$. Par une récurrence évidente, on en déduit que pour tout $k \geqslant p$ on a $\ker u^k = \ker u^p$.
b) S'il n'existait pas un tel entier p, on aurait une suite strictement croissante de sev, ce qui est difficile en dimension finie ! on peut même préciser que $p \leqslant n$.

<u>**On suppose jusqu'à la fin que** $\dim \ker u = 1$**.**</u>

c) Hypothèse de récurrence : $(H_p)\ \forall\ k \in [1, p],\ \dim \ker u^k = k$.
• C'est vrai pour $p = 1$ par hypothèse.
• Supposons (H_p) vraie et considérons la restriction $\tilde{u}$ de u à $\ker(u^{p+1})$ (c'est un sev stable ! ! !) le noyau de $\tilde{u}$ est inclus dans celui de u et donc sa dimension ne peut excéder 1.
Mais $\mathrm{Im}\,\tilde{u} \subset \ker(u^p)$: par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim \ker(u^{p+1}) = \dim \mathrm{Im}\,\tilde{u} + \dim \ker \tilde{u} \leqslant p + 1$$

en utilisant (H_p).
Or la suite des noyaux itérés étant strictement croissante jusqu'à ce qu'elle remplisse E (puisque u est nilpotent), on ne peut avoir $\dim \ker(u^{p+1}) = p$ mais seulement $\dim \ker(u^{p+1}) = p + 1$, cqfd.
Ce qui reste vrai même sans l'hypothèse que $\dim \ker u = 1$ est que la suite de terme général $\dim \ker(u^{p+1}) - \ker(u^p)$ décroît. Mais c'est encore plus délicat.
La plus petite valeur p telle que $u^p = 0$ est donc $p = n$.

3.4.
a) Prenons $x_0 \notin \ker(u^{n-1})$, alors (cours) la famille $B = (u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), \ldots, u(x_0), x_0)$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est une matrice de JORDAN.
b) Une base de $\ker u^k$ est $(e_1, \ldots, e_k) = (u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), \ldots, u^{n-k}(x_0))$, qui est bien une famille libre incluse dans $\ker u^k$, de cardinal égal à k.
c) On ne peut pas utiliser le lemme du cours sur u et v qui commutent pour prouver que $\ker u^k$ est stable par v ! il faut le faire à la main :
Soit $x \in \ker u^k$, alors $u^k \circ v(x) = (u^k \circ v - v \circ u^k)(x) = k u^k(x) = 0$, cqfd.
Comme v stabilise un drapeau (associé à B), la matrice de v dans la base B est **triangulaire**.

3.5.
a) On peut faire par le calcul, en notant que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi observer que v_0 est une solution de (E) ! ! ! et donc si v est aussi solution, on a

$$u \circ (v - v_0) - (v - v_0) \circ u = 0$$

c'est à dire que $v - v_0$ est dans le **commutant** de u. En revanche, le calcul du commutant de u (ou plutôt de sa matrice J) est rapide, il se réduit aux polynômes en u. On a donc aussitôt le résultat de la question suivante :
b) v s' écrit $v = v_0 + P(u)$ où P est un polynôme de degré $d^\circ P \leqslant n - 1$.
c) Soit $v_0 \in \mathcal{L}(E)$ ayant pour valeurs propres $0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ces n valeurs propres étant distinctes, il existe une base B de vecteurs propres de v_0 ; supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v_0 - v_0 \circ u = u$, cherchons ce que l'on peut dire de l'image du $k^{\text{ième}}$ vecteur de base : $v_0(e_k) = (k-1)e_k$ et donc

$$u \circ v_0(e_k) - v_0 \circ u(e_k) = u(e_k) \Rightarrow (k-2)u(e_k) = v(u(e_k))$$

ce qui prouve que $u(e_k)$ est dans l' espace propre E_{k-2} de v et donc est proportionnel à e_{k-1}.

3.6. **Généralisation.** On suppose connus $u_1, v_1 \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u_1 \circ v_1 - v_1 \circ u_1 = \alpha u_1 + \beta v_1$ avec $\alpha\beta \neq 0$, posons tout naturellement

$$u = u_1 + \frac{\beta}{\alpha}\, v_1 \qquad v = u_1 + \frac{1+\beta}{\alpha}\, v_1$$

Il vient alors $u \circ v - v \circ u = \frac{1}{\alpha}(u_1 \circ v_1 - v_1 \circ u_1) = u$!

Ne dites surtout pas que vous avez essayé pendant des heures entières des combinaisons de u_1 et v_1 avant de trouver celle-ci ...

3.7. **Aspect météorologique du problème.** v_0 a des barreaux bien quantifiés et numérotés, u_0 permet de passer d'un « barreau » de l'échelle v_0 (c'est à dire une droite propre) à un autre : u_0 est la grenouille et v_0 l'échelle.

C'est plus sérieux que cela en a l'air : pensez que v_0 ressemble fort aux niveaux d'énergie d'un atome en Mécanique Quantique ...