Polytechnique M'1 96

PARTIE I

1. <u>a) Fonction f</u> : La majoration $|\beta^{-n}cos(2\pi\alpha^n x)| \leq \beta^{-n}$ avec $\beta > 1$, assure la convergence normale sur $I\!R$, donc uniforme, de la série.

   Chaque terme général est une application 1-périodique continue, donc :

   f est une application 1-périodique continue.

   <u>b) f de classe C^k</u> : Tant que $k < \dfrac{ln\beta}{ln\alpha}$, le terme général $\beta^{-n}(2\pi\alpha^n)^k cos(2\pi\alpha^n x + k\dfrac{\pi}{2})$ de la série dérivée k fois terme terme vérifie $|\beta^{-n}(2\pi\alpha^n)^k cos(2\pi\alpha^n x + k\dfrac{\pi}{2})| \leq (2)^k\alpha^{kn}\beta^{-n}$ avec $\alpha^k\beta^{-1} < 1$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme, de cette série. Dès lors:

   $$f \text{ est de classe } C^k \text{ pour tout entier } k < \frac{ln\beta}{ln\alpha}.$$

---

2. <u>Coefficients de Fourier de f</u> : On sait qu'une série trigonométrique uniformément convergente est la série de Fourier de sa somme. La série du 1a) est donc la série de Fourier de f, c'est à dire avec les notations usuelles :

   Pour $n \in I\!N$ $\quad a_{\alpha^n}(f) = \beta^{-n}$ et tous les autres coefficients sont nuls.

---

3. <u>Réciproque du 1b)</u> : Si f est de classe C^k, la série de Fourier de $f^{(k)}$ se déduit de celle de f en dérivant k fois terme à terme (voir cours: cela résulte d'intégrations par parties et ne signifie nullement que $f^{(k)}$ est la somme de sa série de Fourier).

   Les coefficients de Fourier de $f^{(k)}$ sont donc, au signe près, les $(2\pi)^k\alpha^{kn}\beta^{-n}$ déjà rencontrés. Comme $f^{(k)}$ est une application 1-périodique continue, le théorème de Parseval assure la convergence de la série de terme général $(2\pi)^{2k}\alpha^{2kn}\beta^{-2n}$. Cette série est géométrique et sa convergence signifie que $\alpha^{2k}\beta^{-2} < 1$, c'est à dire $k < \dfrac{ln\beta}{ln\alpha}$:

   $$Si\ f \text{ est de classe } C^k, \text{ alors } k < \frac{ln\beta}{ln\alpha}.$$

PARTIE II

4. Matrices des éléments de G_0 : Lorsque A est dans G_0, comme e_1 et e_2 sont dans $\mathbf{Z^2}$, il en est de même de leurs images par A , et cela signifie que la matrice M de A est à coefficients entiers. De plus dét $M = 1$.

   Réciproquement, supposons que M soit à coefficients entiers avec dét $M = 1$. L'endomorphisme A de $\mathbf{R^2}$ qu'elle représente est alors bijectif et vérifie clairement $A(\mathbf{Z^2}) \subset \mathbf{Z^2}$. Mais puisque dét $M = 1$, la matrice M^{-1} est la transposée de la comatrice de M, elle aussi à coefficients entiers, de sorte que l'on a aussi $A^{-1}(\mathbf{Z^2}) \subset \mathbf{Z^2}$.

Les matrices demandées sont les matrices de déterminant 1 et à coefficients entiers.

5. Valeurs de dét A : Lorsque A est dans G, sa matrice et celle de A^{-1} sont à coefficients entiers. Ainsi dét A et dét A^{-1} sont deux entiers inverses l'un de l'autre, et valent donc 1 ou -1.

   Réciproquement $A = Id$ et la symétrie par rapport à l'un des axes montrent que les valeurs 1 et -1 sont effectivement prises par dét A pour A dans G :

   Quand A parcourt G, dét A parcourt $\{-1, 1\}$.

6. Cas où $|trA| > 2$: Il est alors immédiat que le polynôme caractéristique de A possède deux racines réelles distinctes, de produit égal à 1. A est notamment diagonalisable.

PARTIE III

7. Ensembles U_p et T_p : Δ_0 est l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R^2}$ dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2) appartiennent à $[0, 1[$. $A(\Delta_0)$ est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R^2}$ dont les coordonnées dans la base $(A(e_1), A(e_2))$ appartiennent à $[0, 1[$: il s'agit donc du parallélogramme de sommets $(0, 0), (1, 1), (2, 3), (1, 2)$, deux des côtés étant inclus et les deux autres exclus.

   Seuls quatre ensembles Δ_p fournissent un ensemble U_p non vide. Ils correspondent à $p \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$. Les T_p correspondants se déduisent par translation (voir figure). On *constate* ici que Δ_0 est la réunion disjointe de ces T_p.

8. $\underline{A(\Delta_0) \text{ et } \Delta_0}$: • Comme il est évident que $\mathbf{R^2}$ est la réunion disjointe des ensembles Δ_p , on obtient par intersection avec $A(\Delta_0)$:

   $A(\Delta_0)$ *est la réunion disjointe des ensembles* U_p.

   • De même, puisque A est une bijection de $\mathbf{R^2}$ sur lui-même, $\mathbf{R^2}$ est la réunion disjointe des ensembles $A(\Delta_p)$ et, par intersection avec Δ_0: Δ_0 est la réunion disjointe des ensembles $V_p = A(\Delta_p) \cap \Delta_0$.

   Or, par linéarité:

   $T_p = \Delta_0 \cap [A(\Delta_0) - p] = \Delta_0 \cap A[\Delta_0 - A^{-1}(p)] = \Delta_0 \cap A(\Delta_{-A^{-1}(p)}) = V_{-A^{-1}(p)}$.

   Mais les conditions imposées à A assurent en fait que $A(\mathbf{Z^2}) = \mathbf{Z^2}$ et A, aussi bien que A^{-1} ou $-A^{-1}$, induisent une bijection de $\mathbf{Z^2}$ sur lui-même:

Δ_0 *, réunion disjointe des ensembles* V_p *, est donc aussi la réunion disjointe des ensembles* T_p*.*

---

9. $\underline{\text{Démonstration de (1)}}$: Puisque $A(\Delta_0)$ est un ensemble borné, les U_p non vides sont en nombre fini. En convenant qu'une intégrale sur l'ensemble vide est nulle, les propriétés des intégrales doubles permettent d'écrire :

   $\displaystyle\iint_{\Delta_0} f = \sum_{p\in\mathbf{Z^2}} \iint_{U_p} f$ et $\displaystyle\iint_{A(\Delta_0)} f = \sum_{p\in\mathbf{Z^2}} \iint_{T_p} f$ où les sommes sont finies.

   Mais le changement de variables défini par $x = y + p$ càd $x_1 = y_1 + p_1$ et $x_2 = y_2 + p_2$, dont le jacobien est égal à 1 et qui est tel que x décrit U_p lorsque y décrit T_p , donne :

   $$\iint_{U_p} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint_{T_p} f(y_1{+}p_1, y_2{+}p_2)dy_1dy_2 = \iint_{T_p} f(y_1, y_2)dy_1dy_2$$

   (car f est $\mathbf{Z^2}$-périodique).

La sommation sur p *décrivant* $\mathbf{Z^2}$ *de ces égalités donne alors la relation (1).*

PARTIE IV

10. $\underline{\psi \text{ solution de (2)}}$: • φ , continue, est bornée sur le compact $[0,1]^2$ et donc bornée sur $\mathbf{R^2}$ par $\mathbf{Z^2}$-périodicité. Avec $b > 1$, la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}\varphi \circ A^n$ est donc normalement convergente sur $\mathbf{R^2}$. Ceci assure que ψ est bien définie, et continue car chaque terme de la série est continu (A est linéaire).

   • Pour tout $p \in \mathbf{Z^2}$:

   $\psi(x+p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}\varphi(A^n(x)+A^n(p)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}\varphi(A^n(x)) = \psi(x)$ car $A^n(\mathbf{Z^2}) \subset \mathbf{Z^2}$

   et ψ est donc $\mathbf{Z^2}$-périodique. Ainsi, $\psi \in C^0_{per}$.

   • Enfin:

   $b\psi(x) - \psi(A(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n}\varphi(A^n(x)) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}\varphi(A^{n+1}(x)) = \varphi(x)$ car seul le premier terme de la première somme subsiste. Finalement:

   $$\psi \in C^0_{per} \textit{ et est solution de (2).}$$

---

11. Unicité : Si ψ_1 est aussi solution de (2) dans C^0_{per} , la différence $\theta = \psi - \psi_1$ appartient à C^0_{per} et vérifie $b\theta = \theta \circ A$. Une récurrence évidente montre alors que $\forall k \in \mathbf{N} \quad b^k\theta = \theta \circ A^k$ et donc pour tout x : $\theta(x) = b^{-k}\theta(A^k(x))$. Comme θ est bornée (même argument que pour φ au 10.) et $b > 1$, le passage à la limite quand k tend vers l'infini donne $\theta(x) = 0$.

   $$\psi \textit{ est l'unique solution de (2) dans } C^0_{per}.$$

---

12. $\underline{\psi \text{ de classe } C^k}$: A est diagonalisable, on l'a vu au II.6., de valeurs propres a et $c = a^{-1}$, distinctes, avec par conséquent $|c| < |a|$.

   Si (e'_1, e'_2) est une base propre pour A et (y_1, y_2) les coordonnées de x dans cette base, alors $\psi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}\varphi(a^n y_1, c^n y_2)$.

   Chaque terme de cette série est une fonction de classe C^∞, et la série dérivée k fois terme à terme, k_1 fois par rapport à y_1 et k_2 fois par rapport à y_2, avec $k_1 + k_2 = k$, est : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-n-1}a^{nk_1}c^{nk_2}\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}}(a^n y_1, c^n y_2)$.

   Tant que $k < \dfrac{lnb}{ln|a|}$, le module du terme général de cette série est uniformément majoré par $M|b^{-n-1}a^{nk_1}c^{nk_2}|$ (où M est un majorant sur

$\mathbf{R^2}$ de $|\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}}|$, bornée car continue et $\mathbf{Z^2}$-périodique) et donc par $Mb^{-n-1}|a|^{nk}$ avec $|a|^k b^{-1} < 1$, ce qui assure la convergence normale donc uniforme, sur $\mathbf{R^2}$, de cette série.

Cela prouve que ψ admet des dérivées partielles continues sur $\mathbf{R^2}$ jusqu'à l'ordre k :

$$\psi \textit{ est de classe } C^k \textit{ pour tout } k < \frac{lnb}{ln|a|}.$$

PARTIE V

13. $\underline{(f \circ A)\hat{} = \hat{f} \circ D}$: Par définition, pour $p \in \mathbf{Z^2}$:

$(f \circ A)\hat{}\,(p) = \iint_{\Delta_0} (f \circ A)(x) exp(-2\pi i(p|x)) dx_1 dx_2$,   avec $(p|x)$ produit scalaire usuel sur $\mathbf{R^2}$.

Remarquons que la fonction intégrée est encore dans C^0_{per} (car A conserve $\mathbf{Z^2}$ et par $2i\pi$-périodicité de l'exponentielle). D'après la partie III., on peut donc remplacer l'intégration sur Δ_0 par une intégration sur $A^{-1}(\Delta_0)$ puisque $A^{-1} \in G_0$.

$(f \circ A)\hat{}\,(p) = \iint_{A^{-1}(\Delta_0)} (f \circ A)(x) exp(-2\pi i(p|x)) dx_1 dx_2$.

Effectuons alors le changement de variable linéaire bijectif défini par $x = A^{-1}(y)$: y décrit Δ_0 et le jacobien de cette application linéaire est son déterminant puisqu'elle est sa propre différentielle en tout point. Ici ce déterminant vaut 1. Donc:

$(f \circ A)\hat{}\,(p) = \iint_{\Delta_0} f(y) exp(-2\pi i(p|A^{-1}(y))) dy_1 dy_2$.

Mais, par définition de D, $(p|A^{-1}(y)) = (D(p)|y)$, de sorte que:

$(f \circ A)\hat{}\,(p) = \iint_{\Delta_0} f(y) exp(-2\pi i(D(p)|y)) dy_1 dy_2 = \hat{f}(D(p))$.

$$\textit{On a bien } (f \circ A)\hat{} = \hat{f} \circ D.$$

14. $\underline{\text{Calcul de } \hat{\varphi}}$: Remarquons que pour tout $p \in \mathbf{Z^2}$:

$\iint_{\Delta_0} exp(-2i\pi(p_1x_1 + p_2x_2)) dx_1 dx_2 = (\int_0^1 exp(-2i\pi p_1 x_1) dx_1)(\int_0^1 exp(-2i\pi p_2 x_2) dx_2)$
qui est nul lorsque $p0$, et vaut 1 pour $p = 0$.

En écrivant $cos\, 2\pi x_1 = \dfrac{1}{2}(exp(2i\pi x_1) + exp(-2i\pi x_1))$, on en déduit :

$$\hat{\varphi}(p) = \frac{1}{2} \textit{ pour } p = e_1 \ ; \hat{\varphi}(p) = 0 \textit{ sinon.}$$

Calcul de $\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))$: L'application de la question 13. avec $f = \psi$ et $A^{-n} \in G_0$ remplaant A (donc D^{-n} remplaant D) donne :

$\hat{\psi}(D^{-n}(e_1)) = (\psi \circ A^{-n})\,\hat{}\,(e_1) = \iint_{\Delta_0} \psi(A^{-n}(x)) exp(-2i\pi x_1) dx_1 dx_2$.

En remplaant ψ par sa définition :

$\hat{\psi}(D^{-n}(e_1)) = \iint_{\Delta_0} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k-1} \varphi(A^{k-n}(x)) exp(-2i\pi x_1) dx_1 dx_2$.

La convergence normale sur Δ_0 de la série intégrée (majoration par Mb^{-k-1}) autorise l'intégration terme à terme (en décomposant au besoin par la formule de Fubini) :

$\hat{\psi}(D^{-n}(e_1)) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k-1} \iint_{\Delta_0} \varphi(A^{k-n}(x)) exp(-2i\pi x_1) dx_1 dx_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k-1} (\varphi \circ A^{k-n})\,\hat{}\,(e_1)$.

Or le résultat du 13. donne encore $(\varphi \circ A^{k-n})\,\hat{}\,(e_1) = \hat{\varphi}(D^{k-n}(e_1))$, et d'après le calcul de $\hat{\varphi}$ ceci est nul sauf si $D^{k-n}(e_1) = e_1$.

Mais les valeurs propres de D^{k-n} sont a^{k-n} et c^{k-n} (inverses de celles de A^{k-n}), différentes de 1 et de -1 si kn car $|a| > 1$ et $|c| < 1$, de sorte que $D^{k-n}(e_1)e_1$ lorsque kn. Finalement il ne reste dans la somme que le terme d'indice $k = n$, soit $\frac{1}{2}b^{-n-1}$:

$$\hat{\psi}(D^{-n}(e_1)) = \frac{1}{2}b^{-n-1}$$

15. Somme finie : Les valeurs propres de D sont $c = a^{-1}$ et $a = c^{-1}$, distinctes. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base propre pour D et $\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers cette base. Pour simplifier, remarquons que, quitte à remplacer l'un des vecteurs ε_i par un vecteur colinéaire, on peut supposer que cette matrice est de déterminant 1, de sorte que son inverse est $\begin{bmatrix} w & -u \\ -v & t \end{bmatrix}$.

    Donc $e_1 = w\varepsilon_1 - v\varepsilon_2$. On a alors, si ε_1 est associé à a :

    $D^{-n}(e_1) = wa^{-n}\varepsilon_1 - vc^{-n}\varepsilon_2 = wc^n\varepsilon_1 - va^n\varepsilon_2$ et les composantes $D^{-n}(e_1)_1$ et $D^{-n}(e_1)_2$ de $D^{-n}(e_1)$ dans (e_1, e_2) sont donc :

    $D^{-n}(e_1)_1 = wtc^n - vua^n$ et $D^{-n}(e_1)_2 = wvc^n - vwa^n$.

    Remarquons maintenant que t, u, v, w sont tous non nuls: en effet, si l'un d'eux l'était, e_1 ou e_2 serait vecteur propre de D. La matrice de D dans

(e_1, e_2) serait donc triangulaire et comme elle est à coefficients entiers, les valeurs propres de D seraient entières, ce qui est incompatible avec $ac = 1$ et $|a| > 1$.

Lorsque n tend vers l'infini, on a donc : $D^{-n}(e_1)_1 \sim -vua^n$ et $D^{-n}(e_1)_2 \sim -vwa^n$.

Avec la valeur de $\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))$ obtenue au 14., le terme général de la série *à termes positifs* proposée est équivalent à $Ba^{2n(k_1+k_2)}b^{-2n-2}$ où B est un réel non nul.

Par comparaison avec cette série géométrique :

La série proposée converge si et seulement si $a^{2(k_1+k_2)}b^{-2} < 1$ *c'est à dire* $k_1 + k_2 < \dfrac{lnb}{ln|a|}$.

---

16. ψ de classe C^k? : On sait déjà que pour $k < \dfrac{lnb}{ln|a|}$ la fonction ψ est de classe C^k (question IV.12.).

Réciproquement, supposons ψ de classe C^k. Alors ψ possède notamment une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k\psi}{\partial x_1^k}$ encore élément de C^0_{per}. Nommons θ cette dérivée et appliquons lui le résultat admis par l'énoncé : les sommes $\sum\limits_{p\in X} |\hat{\theta}(p)|^2$ pour X partie finie de $\mathbf{Z^2}$ sont majorées par l'intégrale de $|\theta|^2$ sur Δ_0.

Calculons $(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1})\hat{}\,(p) = \displaystyle\iint_{\Delta_0} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)exp(-2i\pi(p_1x_1 + p_2x_2))dx_1dx_2$

qui est aussi : $\displaystyle\int_0^1 \Big(exp(-2i\pi p_2x_2)dx_2 \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)exp(-2i\pi p_1x_1dx_1)\Big)$.

Une intgration par parties suivant x_1 donne:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)exp(-2i\pi p_1x_1)dx_1 = \int_0^1 2i\pi p_1\psi(x)exp(-2i\pi p_1x_1dx_1)$

car le crochet est nul par périodicité de ψ et de l'exponentielle.

On en déduit : $(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1})\hat{}\,(p) = 2i\pi p_1\hat{\psi}(p)$ et par itération $\hat{\theta}(p) = (\dfrac{\partial^k\psi}{\partial x_1^k})\hat{}\,(p) = (2i\pi p_1)^k\hat{\psi}(p)$.

Choisissons alors la partie finie X de $\mathbf{Z^2}$ constituée des éléments $D^{-n}(e_1)$ pour n variant de 0 à N. Ils sont tous distincts car D^{-m} , $m0$, n'admet pas 1 pour valeur propre.

Alors : $\sum\limits_{p\in X} |\hat{\theta}(p)|^2 = \sum\limits_{n=0}^{N} |\hat{\theta}(D^{-n}(e_1))|^2 = \sum\limits_{n=0}^{N} |(2i\pi D^{-n}(e_1)_1)^k\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))|^2$.

Le fait que ces sommes sont majorées entraîne la convergence de la série à *termes positifs* $\sum_{n=0}^{+\infty}(D^{-n}(e_1)_1)^{2k}|\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))|^2$ et cela impose d'après la question 15. précédente que $k < \dfrac{lnb}{ln|a|}$.

Finalement :

$$\psi \textit{ est de classe } C^k \textit{si et seulement si } k < \frac{lnb}{ln|a|}.$$
