École Polytechnique M' 1996 Deuxième épreuve Sous algèbres commutatives nilpotentes de $\mathcal{L}(E, E)$

July 30, 2000

Cette solution a été rédigée comme un document de travail et non comme un corrigé modèle. Certaines remarques ou mises en garde seraient déplacées dans une copie de concours, certaines questions sont rédigées de façon beaucoup trop sommaire.

Première partie

1 Un endomorphisme nilpotent

1.a

$\ker T$ est au plus de dimension 1, sinon T serait nul, et au moins de dimension 1, sinon T serait inversible, donc non nilpotent. Donc

$$\dim(\ker T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 1$$

1.b

Montrons d'abord que $\ker T = \operatorname{Im} T$. $\ker T \cap \operatorname{Im} T$ n'est pas réduit à zéro, sinon les images itérées d'un élément pris hors du noyau seraient toutes non nulles. N'étant pas réduite à zéro, l'intersection ne peut tre que de dimension 1, donc égale à $\ker T$ et $\operatorname{Im} T$. On prend pour premier vecteur de base un vecteur v quelconque hors du noyau. Son image $w = T(v)$ est dans le noyau, on la prend comme second vecteur de base (v et w sont bien indépendants). Il est alors clair que $r = 2$.

On aurait aussi pu remarquer qu'un endomorphisme nilpotent admet E comme sous-espace caractéristique pour la valeur propre 0; la base demandée s'obtient trivialement par réduction triangulaire. Pour un espace de dimension 2, la référence aux sous espaces caractéristiques[1] est un peu disproportionnée avec le but à atteindre.

[1]qui disparaissent du programme en septembre 1996

2 Une algèbre nilpotente

On sait déjà, d'après I.1.b, que tous les éléments non nuls de $\mathcal{A}$ sont 2-nilpotents. Soient U et V deux éléments de $\mathcal{A}$, comme l'algèbre est commutative, on peut appliquer la formule du binôme, $(U+V)^2 = U^2 + V^2 + 2UV$, mais U^2, V^2 et $(U+V)^2$ sont nuls, donc $UV = 0$. *L'algèbre est 2-nilpotente*

Choisissons un élément T non nul de $\mathcal{A}$ et prenons pour T une base du type étudié en I.1.b Dans cette base, un autre élément U de $\mathcal{A}$ aura une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En écrivant que $TU = UT = 0$ (car $\mathcal{A}$ est 2-nilpotente) on constate que seul c peut tre non nul.

Deuxième partie

3 décomposition de E en somme directe

Prendre $T_{i,j} = P_i \circ T \circ P_j$

4 produit par blocs

$$\begin{aligned}
(ST)_{i,j} &= P_i \circ ST \circ P_j \\
&= P_i \circ S \circ (\sum_k P_k) \circ (\sum_l P_l) \circ T \circ P_j \\
&= \sum_k \sum_l P_i \circ S \circ P_k \circ P_l \circ T \circ P_j \\
&= \sum_k (P_i \circ S \circ P_k) \circ (P_k \circ T \circ P_j) \qquad = \qquad \sum_k S_{i,k} T_{k,j}
\end{aligned}$$

en effet $\sum_k P_k = Id$ et $(k \neq l) \Rightarrow (P_k \circ P_l = 0)$

Troisième partie

5

Si $E_3 = E$ on a à la fois $\ker T \supset E$ et $\mathrm{Im}\ T \supset E$, c'est à dire $\ker T = \mathrm{Im}\ T = E$, ce qui est incompatible avec $\dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\ T = \dim E$.

Si $E_3 = 0$ on vérifie par récurrence que si $x \notin \ker T$, toutes les images itérées de x sont non nulles, donc T n'est pas nilpotent.

6 2-nilpotence

On vérifie facilement que $E_3 = \mathrm{Im}\ T$ ssi $r = 2$ ($r = 1$ est exclu car $T \neq 0$).

7 représentation triangulaire par blocs

E_1 est un supplémentaire de $\operatorname{Im} T$ dans E, donc les images des vecteurs de base ont des projections nulles sur E_1; la première ligne de la matrice par blocs est donc nulle. E_3 est inclus dans le noyau, donc tous les vecteurs de E_3 ont des images nulles; la dernière colonne de la matrice par blocs est donc nulle.

8 réduction triangulaire à diagonale nulle

T^k est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ? & T_{2,2}^k & 0 \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix}$ donc pour $k \geq r$, $T_{2,2}^k = 0$. *Comme on l'a déjà remarqué, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent est λ^n, donc n'importe quelle base de ¡¡triangularisation¿¿ de T répond à la question. Cette démonstration, conforme au programme, n'utilise rien de ce qui précède. Si on tient à utiliser les questions précédentes, on peut raisonner comme suit:*

Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le problème est sans intér t et pour $n = 2$ il a été résolu à la première partie. Supposons le résultat démontré dans K^d pour tout $d < n$. Soit $T \neq 0$ nilpotent dans K^n.

Si T est 2-nilpotent, on a vu en **Q8** que $E_3 = \operatorname{Im} T$, donc on peut faire une décomposition analogue à celle de **Q7**, avec E_2 réduit à $\{0\}$, donc de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$ qui répond à la question.

Si T est r-nilpotent, avec $r > 2$, la décomposition faite en **Q7** ramène au m me problème pour $T_{2,2}$, dans E_2 qui est de dimension strictement inférieure à n : on applique l'hypothèse de récurrence.

9 ordre de nilpotence et dimension

En **Q8** on a représenté T par une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle. On constate alors que T^k est représenté par une matrice dont les $k - 1$ premières sous-diagonales sont nulles, T^n est donc repésenté par la matrice nulle : $r \leq n$

10 exemple numérique

Il suffit de changer l'ordre des vecteurs de base: en les écrivant dans l'ordre e_1, e_3, e_4, e_2 on obtient pour T une réduction de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quatrième partie

11

r étant l'ordre de nilpotence, c'est à dire *le plus petit entier* tel que le produit de r éléments quelconques de $\mathcal{A}$ soit nul, il existe $r-1$ éléments de $\mathcal{A}$, $T_1 \dots T_{r-1}$ dont le produit P n'est pas nul. Le noyau de P est donc *strictement* inclus dans E. Ce noyau contient $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ car pour tout T de $\mathcal{A}$ il contient $\operatorname{Im} T$ (en effet $P \cap T = 0$ comme produit de r éléments de $\mathcal{A}$). $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ est donc distinct de E.

E_3 est inclus dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, il est donc distinct de E. Comme en **Q5**, si $E_3 = \{0\}$ les images d'un élément non nul de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ par n'importe quel élément de $\mathcal{A}$ seraient non nulles et dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, donc par récurrence les images itérées seraient toutes non nulles, donc $\mathcal{A}$ ne serait pas nilpotente.

12 2-nilpotence

$E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ ssi $r = 2$.

13 généralisation de la question 8

13.a

$\mathcal{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre commutative nilpotente d'ordre $r' \leq r$, cela découle trivialement des formules de produit de matrices par blocs (voir **Q4**).

13.b

On utilise exactement la m me technique de récurrence qu'en **Q8**; *la démonstration directe signalée pour **Q8** ne se généralise pas.*

13.c

Comme en **Q8**, on constate que dans la base construite ci-dessus, tous les produits de k éléments de $\mathcal{A}$ sont représentés par des matrices triangulaires inférieures ayant leur diagonale et $k-1$ sous-diagonales nulles. On en déduit que $r \leq n$.

14

Le rôle de l'hypothèse $r \geq 4$ est dissimulé dans ce qui suit par les points de suspension: il faut que, lorsque dans un produit de $r-1$ éléments on supprime le premier et le dernier, il reste au moins un terme, c'est à dire $r-1 \geq 3$.
Il est trivial que $r' \leq r$ et que $r' \leq \dim E_2 \leq n-2$; Montrons que $r' \leq r-2$
Par définition de r' il existe $x \in E_2$ et $r'-1$ éléments de $\mathcal{A}$, notés $T^1, T^2, \dots, T^{r'-1}$ tels que $T_{2,2}^{r'-1} \circ T_{2,2}^{r'-2} \circ \dots \circ T_{2,2}^2 \circ T_{2,2}^1(x) \neq 0$ (*aucune confusion de notation n'est à craindre avec des exposants: il n'y a aucun exposant dans la solution de cette question*). x appartient à E_2 donc il existe $y \in E$ et $T^0 \in \mathcal{A}$ tels que $x = T^0(y)$. On en déduit que

$$T_{2,2}^{r'-1} \circ T_{2,2}^{r'-2} \circ \dots \circ T_{2,2}^2 \circ T_{2,2}^1 \circ T^0(y) \quad \neq \quad 0 \text{ c'est à dire}$$

$$\begin{aligned} P_2 \circ T^{r'-1} \circ P_2 \circ T^{r'-2} \circ P_2 \circ \ldots \circ P_2 \circ T^2 \circ P_2 \circ T^1 \circ P_2 \circ T^0(y) &\neq 0 \quad \text{donc} \\ z = P_2 \circ T^{r'-1} \circ T^{r'-2} \circ \ldots \circ T^2 \circ T^1 \circ T^0(y) &\neq 0 \end{aligned}$$

en effet, à chaque étape de composition, la suppression du projecteur P_2 introduit une composante parasite dans E_3, mais cette composante est annulée à l'étape suivante car la troisième colonne de la matrice par blocs de T^k est nulle. z ainsi défini est dans E_2 , supplémentaire de E_3 dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, or $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$, donc z n'appartient pas à $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, donc il existe $T \in \mathcal{A}$ tel que $T(z) \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} T \circ P_2 \circ T^{r'-1} \circ T^{r'-2} \circ \ldots \circ T^2 \circ T^1 \circ T^0(y) &\neq 0 \qquad \text{donc} \\ T \circ T^{r'-1} \circ T^{r'-2} \circ \ldots \circ T^2 \circ T^1 \circ T^0(y) &\neq 0 \end{aligned}$$

(m me explication que ci-dessus pour la suppression de P_2) donc $r \geq r' + 2$

Un raisonnement analogue montre que $r' \geq r - 2$ donc $r' = r - 2$: d'après la définition de r, il existe $x \in E$ et $T^1 \ldots T^{r-1} \in \mathcal{A}$ tels que $z = T^{r-1} \circ \ldots \circ T^1(x) \neq 0$. Le m me raisonnement que ci-dessus sur P_2 nous permet cette fois d'intercaler P_2 à chaque étape de la composition: $z = T^{r-1} \circ P_2 \circ T^{r-2} \circ P_2 \ldots \circ P_2 \circ T^1(x) \neq 0$ On ne peut pas intercaler P_2 entre T^1 et x car x peut avoir une composante dans E_1 qu'on ne peut pas annuler sans changer la valeur de z. Posons donc $y = P_2 \circ T^1(x)$. On est ramené à la situation de la première partie de la démonstration, $T_{2,2}^{r-2} \circ \ldots \circ T_{2,2}^2(y) \neq 0$ (remarquer que P_2 est un projecteur, donc est égal à son carré). *la démonstration est achevée*

On peut remarquer, bien que ce ne soit pas utile ici, que z appartient à E_3 (il est clair que z appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, et s'il n'appartenait pas à $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ on pourrait trouver $T \in \mathcal{A}$ tel que $T(z) \neq 0$, $\mathcal{A}$ ne serait pas r-nilpotente).

15

15.a

Fixons $T \in \mathcal{A}$ et notons U l'élément générique de $\mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, TU appartient à $\mathcal{A}$. TU s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,2}U_{2,1} & T_{2,2}U_{2,2} & 0 \\ T_{3,2}U_{2,1} & T_{3,2}U_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$ Lorsque U décrit $\mathcal{A}$, $T_{2,2}U_{2,1}$ décrit $T_{2,2}(\mathcal{A}_{2,1})$ et tous ces éléments sont, par définition, dans $\mathcal{A}_{2,1}$ car TU appartient à $\mathcal{A}$.

15.b

Suivant l'indication de l'énoncé, décomposons $E_2 = E_2' \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. Dans le calcul de **Q15a** le terme $T_{2,2}U_{2,1}$ ne doit pas faire apparaître de composante sur E_2' donc $T_{2,2}$ doit tre de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ donc T de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(T) & 0 & 0 \\ T_{2,1}' & C(T) & D(T) & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2}' & T_{3,2}'' & 0 \end{pmatrix}$
Choisissons un vecteur non nul U dans E_2'; par définition de E_2' il appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ donc il existe un endomorphisme $T_1 \in \mathcal{A}$ et un vecteur $U' \in E$ tels que $U = T_1(U')$ et la forme de la matrice de T_1 montre que U' doit avoir une

projection non nulle sur E'_2.
Notons $U' = U_1 + V_1 + W_1$, $U_1 \in E'_2$ $(U_1 \neq 0)$, $V_1 \in E_1$, $W_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$ une éventuelle composante sur E_3 peut tre négligée car elle serait annulée par T_1. De m me U_1 étant dans E'_2 est l'image par un endomorphisme $T_2 \in \mathcal{A}$ d'un vecteur U'_1 qu'on peut décomposer en
$U'_1 = U_2 + V_2 + W_2$, $U_2 \in E'_2$ $(U_2 \neq 0)$, $V_2 \in E_1$, $W_2 \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. On construit ainsi par récurrence $U_1, U_2 \ldots U_r$, mais en remplaçant successivement les U_i par leur valeur on arrive à $U = T_1 \circ T_2 \ldots \circ T_r(U_r) + V + W$, $V \in E_1$, $W \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{1,2})$. C'est à dire, puisque $\mathcal{A}$ est r-nilpotente, $U = V + W$ ce qui est absurde.

16

16.a

Assez facile à démontrer pour une algèbre nilpotente monogène (engendrée par les puissances d'un endomorphisme nilpotent T) en utilisant la réduite de Jordan de T (hors programme). Pour une algèbre commutative nilpotente quelconque, je ne sais pas.

16.b

Prenons l'algèbre engendrée par l'endomorphisme étudié en **Q10**, dans la base réordonnée, on constate que $T' = T^3$ s'exprime par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $T'_{2,1}, T'_{2,2}, T'_{3,2}$ nuls, mais $T'_{3,1}$ non nul.