EXERCICE I

REPRÉSENTONS les points par leur affixe respective, minuscule de leur lettre ; On prend l'origine O du repère au centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; On a h=a+i(c-a) = a(1-i)+ic ; d=a-i(b-a)=a(1+i)-ib ; g=c+i(b-c)=c(1-i)+ib ;

À une similitude près de centre O, (ou encore à un changement d'unité près), on peut supposer que $a = 1$, $b = e^{iu}$ et $c = e^{iv}$; et ainsi :

- $h = 1 - i + ie^{iv} = 1 - i + i(\cos v + i \sin v) = 1 - \sin v + i(\cos v - 1)$
- $d = 1 + i - ie^{iu} = 1 + i - i(\cos u + i \sin u) = 1 + \sin u + i(1 - \cos u)$
- $g = e^{iv}(1-i) + ie^{iu} = (\cos v + i \sin v)(1-i) + i(\cos u + i \sin v) = \cos v + i \sin v - i \cos v + \sin v + i \cos u - \sin u = \cos v + \sin v - \sin u + i(\sin v - \cos v + \cos u)$

LA condition OH=OD donne :

$1 + \sin^2 v - 2\sin v + \cos^2 v + 1 - 2\cos v = 1 + \sin^2 u + 2\sin u + \cos^2 u + 1 - 2\cos u$; soit $3 - 2\sin v - 2\cos v = 3 + 2\sin u - 2\cos u \iff \sin v + \cos v = \cos u - \sin u \iff \sin u + \sin v = \cos u - \cos v \iff \sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{v-u}{2}\right) = -\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$; Soit $\boxed{\sin\left(\frac{\mathbf{u+v}}{\mathbf{2}}\right)\left[\cos\left(\frac{\mathbf{v-u}}{\mathbf{2}}\right) - \sin\left(\frac{\mathbf{v-u}}{\mathbf{2}}\right)\right) = \mathbf{0}}$

AINSI la condition OH=OD équivaut à : $\begin{cases} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) = 0 & \text{(1) u+v=0 modulo } 2\pi \\ \cos\left(\frac{v-u}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v-u}{2}\right) & (2)\ v - u = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \end{cases}.$

DE MME exprimons OG=OH : $3 - 2\sin v - 2\cos v = \cos^2 v + \sin^2 v + \sin^2 u + 2\cos v \sin v - 2\sin v \sin u - 2\cos v \sin u + \sin^2 v + \cos^2 v + \cos^2 u + 2\sin v \cos u - 2\cos v \cos u - 2\sin v \cos v$ soit :

$3 - 2\sin v - 2\cos v = 3 - 2\cos(u - v) - 2\sin(u - v)$ ou encore $\sin(u - v) - \sin v = \cos v - \cos(u - v)$ soit par identitité trigonométrique : $\sin\left(\frac{u-v-v}{2}\right)\cos\frac{u}{2} = -\sin\left(\frac{v-u+v}{2}\right)\sin\frac{u}{2} \iff \boxed{\sin\left(\frac{\mathbf{u-2v}}{\mathbf{2}}\right)\left[\cos\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{2}} - \sin\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{2}}\right] = \mathbf{0}}$

ET la condition OG=OH équivaut à : $\begin{cases} \sin\left(\frac{u-2v}{2}\right) = 0 & \text{(3) u=2v modulo } 2\pi \\ \cos\frac{u}{2} = \sin\frac{u}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right) & (4)\ u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- ■ (1) et (3) donnent $3u = 2k\pi$ **triangle ÉQUILATÉRAL**
- ■ (1) et (4) donnent $-v = u = \frac{\pi}{2}$ **triangle RECTANGLE en A**
- ■ (2) et (3) donnent $v = u + \frac{\pi}{2}$ $v - \frac{\pi}{2} - 2v = 2k\pi$ $v = -\frac{\pi}{2}$ et $v = -\pi$ **triangle RECTANGLE en C**
- ■ (2) et (4) donnent $v - u = \frac{\pi}{2}$ $v = \pi$ **triangle RECTANGLE en B**

EXERCICE II

1) L'ensemble des valeurs impaires de la suite u n'est pas vide, sinon, pour tout n on aurait $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, ce qui serait absurde dès que n dépasse l'exposant de 2 dans b, puisque u_n doit rester entier.

CONSIDÉRONS (v_n) la sous suite de (u_n) formée par les valeurs impaires prises par u_n ; Si $v_n > a$ alors il existe (v_n est un des termes impairs de la suite (u_k)) k tel que $v_n = u_k$ et donc $u_{k+1} = a + u_k$ est pair (a et u_k impairs), par suite $u_{k+2} = \frac{a+u_k}{2} < u_k$ et $v_{n+1} = \frac{u_{k+2}}{2^{un\ entier}} < v_n$.

La suite (v_n) est strictement décroissante tant qu'elle reste $> a$. Cela implique qu'il existe un terme v_n tel que $v_n \leq a$ (donc un $u_k \leq a$), et par le mme raisonnement que précédemment, tous les v_p suivants sont $\leq a$.

2) D'après le principe des TIROIRS (pigeonhole) comme il y a une infinité d'indices, et seulement a valeurs possibles de v_p à partir du rang précédent, il y a deux v_p égaux : $v_p = v_q$ avec $p < q$, et donc deux u_k égaux, ce qui prouve bien la périodicité.

EXERCICE III

La figure ci- dessous donne immédiatement le résultat.

1-2)

Le tableau ci dessous donne les diverses possibilités :

3)

Face	**arte 1**	**arte 2**	**arte 3**	**CNS face Isocèle**
(1)	b	a	$\sqrt{a^2+b^2}$	b=a
(2)	c	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$c^2 = a^2 + b^2$
(3)	a	$\sqrt{b^2+c^2}$	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$a^2 = b^2 + c^2$
(4)	c	b	$\sqrt{b^2+c^2}$	b=c

On a donc C_4^2 choix possibles pour exprimer que deux faces parmi les 4 sont isocèles.

$$\text{Ce qui donne les possibilités :} \left\{ \begin{array}{lll} \text{faces 1 et 2} \bullet \mathbf{b = ac = \sqrt{2}a} & & \\ \text{faces 1 et 3} \bullet \mathbf{b = ac = \sqrt{2}a} & & \text{impossible car c=0} \\ \text{faces 1 et 4} \bullet \mathbf{c = b = a} & & \text{cas du CUBE} \\ \text{faces 2 et 3} \bullet \mathbf{c^2 = a^2 + b^2,\ a^2 = b^2 + c^2 b = a} & & \text{impossible car b=0} \\ \text{faces 2 et 4} \bullet \mathbf{c^2 = a^2 + b^2,\ b = cb = a} & & \text{impossible car a=0} \\ \text{faces 3 et 4} \bullet \mathbf{a^2 = b^2 + c^2,\ a = b\sqrt{2},\ b = c} & & \end{array} \right.$$

EXERCICE IV

On étudie la variation de $f(x) = e^{x\ln(x)}$; $f'(x) = f(x)(\ln(x)+1)$ d'o le tableau de variation :

1)

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$	
$f'(x)$	$---$		0	$+++$				$+++$
$\mathbf{f(x)}$	1	$\searrow$	$e^{\frac{-1}{e}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	

$\boxed{\textbf{La valeur minimale de f sur } \mathbb{R}^+ \textbf{ est donc } \mathbf{e^{\frac{-1}{e}}}}$

La minoration demandée est évidente si au moins un des deux nombres x ou y est ≥ 1 ; S'ils sont égaux, d'après

2) la première question $2x^x \geq 2e^{\frac{-1}{e}} = 2 \times 0.692200628 = 1.384401255 > 1$; Compte tenu de leur rôle symétrique on peut mme supposer que : $0 < x < y < 1$. Mais cela s'avère inutile.

Posons $g(x) = x^y + y^x = x^y + e^{x\ln(y)}$; $g'(x) = yx^{y-1} + \ln(y)e^{x\ln(y)} = e^{x\ln(y)}(\ln(y) + ye^{-x\ln(y)}x^{y-1}) = y^x h(x)$. Étudions h(x) pour avoir son signe ; $h'(x) = -\ln(y)ye^{-x\ln(y)}x^{y-1} + (y-1)ye^{-x\ln(y)}x^{y-2} = ye^{-x\ln(y)}x^{y-2}\big[-x\ln(y) + (y-1)\big] = y^e{-}x\ln(y)x^{y-2}r(x)$ o $r(x) = y - 1 - x\ln(y) \geq 0$; or r, affine en x croissante (car $\ln(y) > 0$), vérifie $r(0) = y - 1 < 0$, $r(1) = y - 1 - \ln(y) = s(y)$, qui est positif, soit par étude directe, que le graphe de $Y = \ln(X)$ est en dessous de sa tangente en $X = 1$.

On a donc le tableau suivant :

x	0		a		1
$r(x)$	$y-1<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	>0
$\mathbf{g(x)}$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$1+y>1$

Par conséquent on a bien $\boxed{\textbf{Pour tous réels x et y} > \mathbf{0} \textbf{ on a } \mathbf{x^y + y^x > 1}}$

BİBLİOGRAPHİE O182ED95.tex, Péréalo ; ensae 1977 ; APM 284 287 332 ; Bouligant p 86 ; American Mathematical Monthly avril 1981 p 235-252 AMM sept 85 (julia) ; AMM avril 90 p 343 ; RMS oral 92 spé 1-93 non résolu ; Sierpinski p 35 note manu ; Nombres remarquables Le Lionnais p 22 ; Pour la science nov+dec 79 exos ; Pb Hormière 29 Nob 95 ; Concours général 95 exercice IV ;

EXERCICE V

1) Comme les a_j+b_j snt k entiers distincts et strictement inférieurs à n, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)\leq\sum_{p=n-k}^{n-1}p=\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}=\frac{-k^2+(2n+1)-2n}{2}$.

C OMME les a_j et les b_j sont 2k entiers naturels distincts, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)\geq\sum_{i=1}^{2k}i=k(2k+1)$.

Ainsi $k(2k+1)\leq\frac{-k^2+(2n+1)-2n}{2}$ soit $5k^2+(-2n+1)k+2n\leq 0$.

Or $T(k)=5k^2+(-2n+1)k+2n$ est une trinôme en k, qui apour racines : $u(n)=\frac{2n-1-\sqrt{4n^2-44n+1}}{10}$ et $v(n)=\frac{2n-1+\sqrt{4n^2-44n+1}}{10}$. Comme $T(k)\leq 0$, il vient $u(n)\leq k\leq v(n)$.

Or $\frac{2n-3}{5}-v(n)=\frac{2n-5-\sqrt{4n^2-44n+1}}{10}\geq 0$ (puisque $(2n-5)^2-(4n^2-44n+1)=24(n+1)$. Donc $\boxed{\mathbf{k\leq\frac{2n-3}{5}}}$.

2) Yaka prendre les 5 couples (a_i,b_i) suivants : $\boxed{\mathbf{(10,3),(9,2),(8,1),(7,5),(6,4)}}$.

3) $2n-3=5k\iff 2(n+1)=5(k+1)$. Un raisonnement classique, utilisant le théorème de GAUSS, montre que ceci a lieu si et seulement si il existe un entier p tel que $k=2p-1$ et $n=5p-1$. *(Ou plus simplement la première montre que k est impair : $k=2p-1$, et la seconde donne en simplifiant par 2 : $n+1=5p$).*

On considère alors les k couples (a_i,b_i) suivants :

- pour $j\in[[1,p]]$, le couple $(j,3p-2+j)$, qui a pour somme $3p-2+2j\leq 5p-2$.
- pour $j\in[[p+1,2p-1]]$, le couple $(j,j+p-1)$ qui a pour somme $p-1+2j\leq 5p-3$.

On a bien ainsi $2k$ naturels non nuls tous distincts $a_1,...,a_k,b_1,...,b_k$, avec les sommes a_i+b_i toutes ditinctes (puisque $3p-2+2a=p-1+2b$ soit $2p-1=2(b-a)$ est impossible : le membre de gauche est impair et celui de droite pair) et strictement inférieurs à n.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996