EXERCICE I

ANS LE PLAN, on considÛre un triangle ABC et les six points D, E, F, G, H, I tels que ABED, BCGF et ACHI
D soient des carrés extérieurs à ABC.

Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

Le triangle ABC est équilatéral ;

Le triangle ABC est rectangle et isocÛle.

EXERCICE II

OIENT a un entier naturel impair et b un entier strictement positif. On considÛre la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie
S :

$u_0 = b$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} \text{si } u_n \text{ est un entier pair, alors} & u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ \text{sinon} & u_{n+1} = a + u_n \end{cases}$

Démontrer qu'on peut trouver un entier naturel n tel que : $u_n \leq a$.
1 .)

Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.
2.)

EXERCICE III

OIT un parallélépipÛde rectangle. Montrer qu'on peut choisir quatre de ses sommets de façon à obtenir un
1 .) S tétraÛdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

ÉCIPROQUEMENT, montrer que tout tétraÛdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles peut s'obtenir
2.) R en choisissant quatre sommets d'un parallélépipÛde rectangle.

ECHERCHER parmi ces tétraÛdres ceux qui ont aussi au moins deux faces isocÛles. Donner les longueurs de
3.) R leurs artes en fonction de la longueur a de la plus petite arte.

EXERCICE IV

OIT la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x^x$. Déterminer la valeur minimale
1 .) S prise par cette fonction losque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

OIENT x et y deux réels strictements positifs, montrer que : $x^y + y^x > 1$.
2.) S

EXERCICE V

OIT n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul k vérifie la condition C_n s'il existe 2k entiers
S naturels non nuls $a_1, b_1, ..., a_k, b_k$ tous distincts, tels que les sommes $a_1+b_1, ..., a_k+b_k$ soient deux à deux distinctes et strictement inférieures à n.

ONTRER que si k vérifie la condition C_n, alors $k \leq \frac{2n-3}{5}$.
1 .) M

ONTRER que 5 vérifie la condition C_{14}.
2.) M

N suppose $\frac{2n-3}{5}$ entier. Montrer que $\frac{2n-3}{5}$ vérifie la condition C_n.
3.) O