**ISUP 96- Maths 1**

Institut de statistiques de l'université Pierre et Marie Curie

*Durée 3heures*

---

Pour tout nombre entier $p$ strictement positif, on note $(E_p)$, l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{p^2}{4})y = 0.$$

L'objet du problème est l'étude de certaines solutions de l'équation $(E_p)$ sur l'intervalle $]\,0, +\infty\,[$ et de leur comportement au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Le sujet comprend trois parties indépendantes, dont le candidat pourra cependant juger utile de vérifier la cohérence des résultats. La première partie concerne exclusivement le cas où l'entier $p$ est égal à 1, alors que les deux autres traitent le cas général où $p$ est un entier strictement positif quelconque.

## Première partie

**1.** Pour tout nombre réel strictement positif $x$, on note :

$$s(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad c(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,.$$

**1.a.** Montrer que $s$ et $c$ sont deux solutions linéairement indépendantes de $(E_1)$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

**1.b.** En déduire l'ensemble des solutions de $(E_1)$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

**2.**

**2.a.** Trouver les solutions de $(E_1)$ sur $]\,0, +\infty\,[$ qui sont prolongeables par continuité en 0.

**2.b.** Résoudre $(E_1)$ sur $[\,0, +\infty\,[$.

**3.**

Soit $f$ une solution de $(E_1)$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

**3.a.** Montrer que $f$ s'annule une infinité de fois (c'est à dire que l'ensemble des nombres réels strictement positifs $x$ tels que $f(x)$ soit nul est infini).

**3.b.**Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ et que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

## Deuxième partie

**1.**

Soit $\alpha$ un réel et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ soit strictement positif ( et éventuellement infini).

Pour tout $x \in\,]\,0, R\,[$, on pose :

$$g(x) = x^\alpha\, h(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

**(1) 1.a.**

Montrer qu' une condition nécessaire pour que $g$ soit solution de $(E_p)$ sur $]\,0, R\,[$ est que pour tout $n \geq 2$, on ait :

$$a_{n-2} + ((\alpha + n)^2 - \frac{p^2}{4})a_n = 0.$$

**1.b.** Montrer que si $a_0$ n'est pas nul, $g$ ne peut être solution de $(E_p)$ sur $]\,0, R\,[$ que si $\alpha$ est égal à $\frac{p}{2}$ ou à $-\frac{p}{2}$·. Que peut-on dire alors de $a_1$ ?

**2.**
**2.a.** Montrer que lorsque $p$ est impair, l'équation $(E_p)$ admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution $s_p$ de la forme (1) pour laquelle $a_0 = 1$, $\alpha = \dfrac{p}{2}$ et $a_p = 0$ ainsi qu' une unique solution $c_p$ de la forme (1) pour laquelle $a_0 = 1$, $\alpha = -\dfrac{p}{2}$ et $a_p = 0$.
**2.b.** Vérifier que $s_p$ et $c_p$ sont linéairement indépendantes et calculer explicitement $s_1$ et $c_1$.

**3.** Pour tout $m$ appartenant à $\mathbb{N}$, on note $f_m$ la fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_m(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k m!}{4^k k!(k+m)!}\ x^{m+2k}$$

**3.a.** Justifier l'existence de $f_m$ et préciser sa valeur en 0.
**3.b.** Donner les coefficients numériques du développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de $f_0$ et de $f_1$.
Indiquer l'allure du graphe de ces deux fonctions au voisinage du point d'abscisse nulle, en précisant l'équation de la tangente correspondante.
**3.c.** Etudier la convexité de $f_m$ au voisinage de 0 lorsque l'entier $m$ est supérieur ou égal à 2.

**4.** Montrer que, lorsque l'entier $p$ est pair, $f_{p/2}$ est l'unique solution de $(E_p)$ sur $]0,+\infty[$, développable en une série entière non nulle $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ dont le premier coefficient $b_n$ non nul soit égal à 1.

## Troisième partie

Dans cette partie $\phi$ désigne une fonction réelle, continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\phi(x)$ tende vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

On note $(D)$ l'équation différentielle : $y'' + \phi(x)y = 0$.

**1.** Justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que

$$\text{Pour tout } x \geq A, \quad \phi(x) > 0$$

puis d'une solution $f$ de $(D)$ sur $]0,+\infty[$ telle que $f(A) > 0$.

**2.** Soient $A > 0$ et $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de $(D)$ vérifiant les conditions de la question 1.
L'objet de cette question est de démontrer par l'absurde que $f$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]A,+\infty[$.
On suppose donc pour aboutir à une contradiction que $f$ ne s'annule pas sur $]A,+\infty[$.
**2.a.** Montrer que $f'$ est décroissante sur $[A,+\infty[$.
**2.b.** Montrer que si cette dérivée $f'$ reste positive ou nulle sur $[A,+\infty[$, la différence $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. Montrer que que c'est impossible en examinant le comportement de $f''(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
**2.c.** Montrer que, s'il existe un réel $B$ supérieur ou égal à $A$ tel que $f'(B)$ soit strictement négatif, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_B^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -\infty$$

**2.d.** Conclure

**3.**
Soit $g$ une solution de $(E_p)$ sur $]0,+\infty[$.
**3.a.** Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x}\, g(x)$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation $(D)$ pour une fonction $\phi$ que l'on précisera.
**3.b.** En déduire que $g$ s'annule une infinité de fois.