CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1996
EHTP - EMI - ENIM - ENPL - ENSEM - ENSIAS - IAV - INPT
Epreuve d'analyse : transformation de Laplace
Solution par A. Driouiche

Première partie :

I.1.1.

a) $f_1\ (t) = U(t)\, e^{at}$, $a \in \mathbf{R}$

- f_1 est causale , continue par morceaux sur **R** car continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f_1(t)=1$, $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)=0$.
- $t \to e^{(a-x)\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $a - x < 0$ donc $f_1 \in E$, $I(f_1) =]a,+\infty[$ et $\sigma(f_1) = a$.

b) $f_2\,(t) = U(t)\, e^{ct}$, $c = a + ib$

- f_2 est causale , continue par morceaux sur **R**
- $\left|f_2(t)\,e^{xt}\right| = e^{(a-x)\,t}$ donc $t \mapsto f_2\,(t)\,e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $a - x < 0$ d'où $f_2 \in E$,

  $I(f_2) =]a,+\infty[$ et $\sigma(f_2) = a$.

c) $f_3\,(t) = U\,(t)\, t^{\alpha}$, $\alpha \in\ ]0,+\infty[$

f_3 est causale , continue sur **R** car continue sur R_-^* et sur R_+^* et $\lim\limits_{t\to 0^+} f_3\,(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} f_3\,(t) = 0 = f_3\ (0)$

- si $x > 0$ on a $t^{\alpha}\, e^{-xt} = 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$ donc $t \to f_3(t)\,e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- si $x \le 0$ $t^{\alpha}\ e^{-xt} \ge t^{\alpha}$ $\forall\, t > 0$ donc $t \mapsto t^{\alpha}\ e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'où $f_3 \in E$, $I(f_3) =]0,+\infty[$ et $\sigma(f_3) = 0$.

d) $f_4\ (t) = U(t)\ \dfrac{\sin^2 t}{t}$

- f_4 est causale , continue sur **R** car continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} f_4(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} f_4(t) = 0 = f_4(0)$.
- pour $x > 0$ $\left|f_4(t)\ e^{-xt}\right| \le \dfrac{e^{-xt}}{t} = 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$ donc $t \mapsto f_4(t)\ e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- pour $x < 0$, soit $t > 0$ on a $\left|f_4(t)\ e^{-xt}\right| \ge \dfrac{\sin^2 t}{t}$ $\displaystyle\int_{[0,n\pi]} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$

  $\displaystyle\ge \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt \,.\, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, on déduit que $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est non

intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite $t \mapsto f_4(t)\ e^{-xt}$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$ d'où

$f_4 \in E$, $I(f_4) =]0,+\infty[$, $\sigma(f_4) = 0$

$f_5(t) = U(t)\dfrac{\sin t}{t}$.

f_5 est causale , continue par morceaux sur **R** , car continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\mapsto 0^+} f_5(t) = 1$, $\lim\limits_{t\mapsto 0^-} f_5(t) = 0$.

- pour $t > 0$ $\left|f_5(t)\ e^{-xt}\right| \le \dfrac{e^{-xt}}{t} = 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \mapsto +\infty$.
- pour $t \le 0$ et $t > 0$ $\left|f_5(t)\ e^{-xt}\right| \ge \dfrac{|\sin t|}{t} \ge \dfrac{\sin^2 t}{t}$ comme $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ non intégrable sur $[0,+\infty[$ alors $f_5 \in E$

  $I(f_5) =]0,+\infty[$, $\sigma(f_5) = 0$.

I.1.2.

a) Soit f définie par $f(t)\begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$ alors $f \in E$, $I(f) = [0,+\infty[$, $\sigma(f) = 0$.

b) Soit f définie par $f(t) = U(t)\ e^{t2}$ alors $f \in E$ et $I(f) = \phi$ car pour $x \in \mathbf{R}$ et pour t assez grand $\left|f(t)\,e^{-xt}\right| \ge \dfrac{1}{t}$.

c) Soit f définie par $f(t) = U(t)\ e^{-t2}$ alors $f \in E$, $I(f) = \mathbf{R}$ car $\left|f(t)\,e^{-xt}\right|\, 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \mapsto +\infty$.

Remarque : Un candidat a présenté les exemples suivants :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad t<1 \\ E(t)! & \text{si}\, t \ge 1 \end{cases}$$

$$g(t)\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \dfrac{1}{E(t)!+1} & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$ que pensez-vous ?

I.2.1.

- pour $x>0$ $\left|f(t)\,e^{-xt}\right| \leq M\,e^{-xt} = 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \mapsto +\infty$ donc $t \mapsto f(t)\,e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- pour $x \leq 0$ $\left|f(t)\,e^{-xt}\right| \geq |f(t)|$ $\forall t \geq t \geq 0$ comme $t \mapsto f(t)$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $I(f) =]0,+\infty[$.

I.2.2.

- pour $x \geq 0$ $\forall t \geq 0$ $\left|f(t)e^{-xt}\right| \leq |f(t)|$ comme $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors $t \mapsto f(t)\;e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite $[0,+\infty[\; \subset I(f)$.
- $f(t) \approx \frac{1}{t^2}$ quand $t \mapsto +\infty$ alors $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $[0,+\infty[\; \subset I(f)$.
- pour $x<0$ $f(t)\,e^{-xt} \approx \frac{e^{-xt}}{t^2}$ quand $t \mapsto +\infty$ donc pour t assez grand $\frac{e^{-xt}}{t^2} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ et donc $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^2}$ non intégrable sur $[1,+\infty[$ et par suite $t \mapsto f(t)\,e^{-xt}$ non intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $I(f) = [0,+\infty[$

I.2.3.

- Soit f définie par $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<1 \\ \frac{1}{t} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

  alors $t \mapsto f(t)$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$ et $t \mapsto f^2(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Soit f telle que $t \mapsto f^2(t)$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$.

- pour $x>0$ on a : $\left|f(t)e^{-xt}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + e^{-2xt}\right)$ $\forall t \geq 0$ comme $t \mapsto |f(t)|^2$ et $t \mapsto e^{-2xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ alors $t \mapsto f(t)e^{-2xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite $]0,+\infty[\; \subset I(f)$.

- pour $x \leq 0$ $\forall t \geq 0$ $\left|f(t)e^{-xt}\right| \geq |f(t)|$ comme $t \mapsto f(t)$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$ alors $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $I(f) = \;]0,+\infty[$.

I.3.1.

Si $x_0 \in I(f)$ alors $t \mapsto f(t)\,e^{-x_0 t}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ soit $x \geq x_0$ alors $\forall t \geq 0$ $\left|f(t)e^{-xt}\right| \leq \left|f(t)e^{-x_0 t}\right|$ donc

$t \mapsto f(t)e^{-xt}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ d'où $x \in I(f)$.

I.3.2. On en déduit

$$I(f) = [\sigma(f), +\infty[\text{ si } \sigma(f) \in I(f)$$
$$I(f) =]\sigma(f), +\infty[\text{ si } \sigma(f) \notin I(f)$$

I.4.1.

- pour $x \in]a,+\infty[$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_0^x e^{(a-x)t}\,dt = \frac{1}{x-a}$ donc $\int_{[0,+\infty[} f_1(t)\,e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x-a}$.
- pour $x \in]a,+\infty[$; $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \int_0^y e^{(c-x)t}\,dt = \frac{1}{x-c}$ donc $\int_{[0,+\infty[} f_2(t)\,e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x-c}$.
- pour $x>0$ $\int_{[0,+\infty[} f_3(t)\,e^{-xt}\,dt = \int_{[0,+\infty[} t^n\,e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x^{n+1}}\int_{[0,+\infty[} u^n\,e^{-u}\,du\ (u = xt)$

  $$= \frac{1}{x^{n+1}}\,M(n+1) = \frac{n!}{x^{n+1}} .$$
- pour $x>a$ $\int_{[0,+\infty[} u(t)e^{at}\cos e^{-xt}\,dt + i\int_{[0,+\infty[} u(t)e^{at}\sin t\,e^{-xt}\,dt = \int_{[0,+\infty[} u(t)\,e^{(a+i-x)t}\,dt$

  $= \frac{1}{x-(a+i)} = \frac{(x-a)+i}{(x-a)^2+1}$ donc les transformées de Laplace de $t \mapsto u(t)\,e^{at}\sin t$ et $t \mapsto u(t)\,e^{at}\cos t$

sont , respectivement , définies par : $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2+1}$ et $x \mapsto \frac{x-a}{(x-a)^2+1}$.

I.4.2. D'après ce qui précède la transformée de Laplace de $t \mapsto u(t)\ t^n\ e^{-t}$ est définie par :

$x \to \int_{[0,+\infty[} t^n\ e^{-(x+1^\circ)t}\ dt = \dfrac{n\,!}{(x+1)^{n+1}}$. $G_n(x) = \dfrac{1}{x(1+x)^{n+1}} = \dfrac{1}{x(1+x)^n} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}$ en itérant on trouve

$G_n(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \ldots\ldots - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto u(t)$.
- $\forall k \in \mathrm{N}\ x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^{k+1}}$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto \dfrac{u(t)\,t^k\ e^{-t}}{k\,!}$ alors la fonction

$t \mapsto g_n\ (t) = u(t)\ (1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k\,!}$ admet pour transformée de Laplace $x \mapsto G_n(x)$ définie sur $]0,+\infty[$.

Deuxième partie

II.1. Il est clair que f_a est continue ou continue par morceaux sur **R** , f_a est causale car pour t < 0 on a t - a < 0 et donc f_a (t) = 0 soit $x_0 \in I(f)$ soit $y > a$ $\int_0^y \left|f_a(t)\,e^{-x_0 t}\right| dt = \int_0^y \left|f(t-a)\ e^{-x_0 t}\right| dt = \int_0^{y-a} \left|f(u)\,e^{-x_0(u+a)}\right|$ du

$$= e^{-x_{0a}} \int_0^{y-a} \left|f(u)\ e^{-x_0 u}\right| du \ .$$

puisque $u \mapsto f(u)\ e^{-x_0 u}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors $t \mapsto f_a(t)\ e^{-x_0 t}$ l'est aussi et donc $x_0 \in I(f_a)$ et par suite $f_a \in E$

soit $x \in \mathrm{R}$ et $y > a$ on a $\int_0^y \left|f_a(t)\,e^{-xt}\right| dt = e^{-xa} \int_0^{y-a} \left|f(t)\ e^{-xt}\right| dt$ donc dire que $t \mapsto f_a(t)\ e^{-xt}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ équivaut à $t \mapsto f(t)\ e^{-xt}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ d'où I(f) = I(f_a) et par suite $\sigma(f) = \sigma(f_a)$ d'autre part

$\int_0^y f_a(t)\ e^{-xt}\ dt = e^{-xa} \int_0^{y-a} f(u)\ e^{-xu}$ du donc la transformée de Laplace de f_a est définie par $x \mapsto e^{-xa}\ F(x)$.

II.2.1. Soit $x \in \mathrm{R}$, soit $(\varepsilon, A) \in \mathrm{R}_+^{*2}$ on a $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-xt}$ sont C^1 sur $[\varepsilon, A]$ donc une intégration par partie donne $\int_{[\varepsilon,A]} f'(t)e^{-xt}\ dt = \left[f(A)\ e^{-xA} - f(\varepsilon)\ e^{-x\varepsilon}\right] + x \int_{[\varepsilon,A]} f(t)\ e^{-xt}\ dt$ or d'après les hypothèses les fonctions $t \mapsto f'(t)$ et $t \mapsto f(t)$ admettent chacune une limite à droite en o d'où en faisant tendre ε vers o on obtient :

$$\int_0^A f'(t)\ e^{-xt}\ dt = \left[f(A)e^{-xA} - f(o+)\right] + x \int_0^A f(t)\ e^{-xt}\ dt \quad (*)$$

II.2.2.

Soit x > Max $(\sigma(f), \sigma(g)$ $t \mapsto f'(t)\ e^{-xt}$ et $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ alors la relation (*) permet d'affirmer que $A \mapsto f(A)e^{-xA}$ admet une limite l en + ∞ . Si l ≠ 0 alors $f(t)e^{-xA} \approx l$ quand $t \mapsto +\infty$ et par suite

$t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Alors la relation (*) permet d'affirmer que $A \mapsto f(A)e^{-xA}$ admet une limite l en $+\infty$. Si $l \neq 0$, alors $f(t)e^{-xt} \approx l$ quand $t \to +\infty$ et par suite $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$. Ceci est absurde , donc $l = 0$.

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient $G(x) = x.F(x) - f(0_+)$.

II.3.1.

Les applications $\varphi_n : [n, n+1] \times]\sigma(f), +\infty[\mapsto \mathbf{C}$, $(t,x) \mapsto \varphi_n(t,x) = f(t)e^{-xt}$ et $\dfrac{d\varphi_n}{dx}(t,x) = -t.f(t).e^{-xt}$ sont continues , donc $U_n :]\sigma(f), +\infty[\mapsto \mathbf{C}$, $x \mapsto \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt}.dt$ est de classe C^1 et

$\forall x \in]\sigma(f), +\infty[, U_n{}'(x) = -\int_n^{n+1} t.f(t)e^{-xt}.dt$

II.3.2.

$\sigma(f) < b < a$: soient $x \geq a$ et $t \geq 0$; on a $\left|t.f(t)e^{-xt}\right| \leq t\left|f(t)\right|.e^{-at} = \left|f(t)\right|.e^{-bt}.t.e^{-(a-b)t}$.

t	o		1/a-b		$+\infty$
$t\,e^{-(a-b)t}$	o	↗	$\dfrac{1}{(a-b)e} = k$	↘	o

donc $\forall x \in [a,+\infty[$ $\forall x \in [0,+\infty[$

$\left|t\,f(t)\,e^{-xt}\right| \leq \dfrac{1}{(a-b)e} \left|f(t)\right| e^{-bt}$

II.3.3. Soit $x \geq a$ on a $|U'_n(x)| \leq \int_n^{n+1} |t\,f(t)\,e^{-xt}|\,dt$

$$\leq K \int_n^{n+1} |f(t)|\,e^{-bt}\,dt = K\,V_n\ .$$

La série de terme général V_n est convergente car $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = \int_0^n \left|f(t).e^{-bt}\right|.dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,+\infty[} \left|f(t).e^{-bt}\right|.dt \quad (\ b > \sigma(f)\ )$.

donc la série $\sum U'_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

- On a
  - $\forall n \in \mathrm{N} \quad U_n\ est\ C^1\ sur\ ]\sigma(f),+\infty[$.
  - La série $\sum U_n$ converge simplement sur $]\sigma(f),+\infty[$ de somme F .
  - La série $\sum U'_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ $((\forall a > \sigma(f))$ donc f est C^1 sur $]\sigma(f),+\infty[$

et pour tout $x \in]\sigma(f),+\infty[$ $F'(x) = \ = \sum_{n=0}^{+\infty} U'_n(x) = \int_{[0,+\infty[} -t\,f(t)\,e^{-xt}\,dt$.

II.4.1. Soit A > 0 , f continue ou continue par morceaux sur $[0,A]$ donc f est bornée sur $[0,A]$, $\exists M > 0 \quad \forall t \in [0,A]$

$|f(t)| \leq M$ donc $\left|\int_0^A f(t)\,e^{-xt}\,dt\right| \leq M \int_0^A e^{-xt}\,dt \leq M \int_{[0,+\infty[} e^{-xt}\,dt = \frac{M}{x}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)\,e^{-xt}\,dt = 0$.

II.4.2. Soit $a \in]\sigma(f),+\infty[$, a fixé , soit x > a

$$\left|\int_{[A,+\infty[} f(t)e^{-xt}\,dt\right| \leq \int_{[A,+\infty[} \left|f(t)e^{-at}\right| e^{(a-x)t}\,dt \leq e^{(a-x)A} \int_A^{+\infty} \left|f(t)e^{-at}\right| dt$$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(a-x)\,A} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,dt = 0$.

II.4.3. On déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

II.5.1. Les f_n sont causales donc pour $t \in \mathrm{R}$ $\forall n \in \mathrm{N}$ $f_n(T-n) = 0$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n\,f_n(t-n)$ converse simplement

sur **R** de somme $f(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t < 0 \\ f_0(0) \quad si = 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{E(t)} (-1)^n\,f(t-n) \quad si\ t > 0 \end{cases}$

donc on peut définir une fonction f sur **R** par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,f_n\,(t-n)$. Montrons que f est continue sur **R** , C^1 sur $]0,+\infty[$. Soit A > 0 alors pour tout $t \in]-\infty,A[$ $f(t) = \sum_{n=0}^{E(A)} (-1)^n\,f_n\,(t-n)$ donc sur $]-\infty,A[$ f est somme finie d'applications continue sur $]-\infty,A[$, C^1 sur $]0,A[$ d'où f est continue sur $]-\infty,A[$, C^1 sur $]0,A[$ et ceci pour tout A > 0 donc on déduit que f est continue sur **R** , C^1 sur $]0,+\infty[$.

II.5.2. Soit x > 0 pour $t \in [\,0,A\,]$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t-n)\,e^{-xt} = \sum_{n=0}^{E(A)} f_n\,(t-n)\,e^{-xt}$

donc $\int_0^A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t-n)\,e^{-xt}\,dt = \sum_{n=0}^{E(A)} \int_0^A f_n\,(t-n)\,e^{-nt}\,dt$. $\forall n > E(A) \int_0^A f_n(t-n)\,e^{-xt}\,dt = 0$ (causalité de f_n)

donc $\int_0^A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^A f_n(t-n)\, e^{-nt}\, dt$.

Montrons que $f \in E$.

- on a f causale , f continue sur **R**
- Soit $x > 0$, soit $A > 0$ $\int_0^A \left|f(t)\, e^{-xt}\right| dt \leq \int_0^A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^A f_n(t-n)\, e^{-nt}\, dt$

or d'après **II-1** $t \mapsto f_n(t-n)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^A f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = e^{-xn} F_n(x)$

donc $\forall A > 0$ $\left|\int_0^A f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt\right| = \int_0^A f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt$

$$\leq \int_0^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = e^{-xn} F_n(x) \ .$$

Comme $\sum_{n\geq 0} e^{-nx} F_N(x)$ converge alors $\int_0^A \left|f(t)\, e^{-xt}\right| dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} F_n(x)$ donc $A \mapsto \int_0^A \left|f(t)\, e^{-xt}\right| dt$ est bornée sur $[0,+\infty[$ et par suite $t \mapsto f(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

II.5.3.

- On a $\left|\int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt\right| \leq e^{-nx} F_n(x)$ donc la série $A \to \sum_{n\geq 0} \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt$ converge normalement donc uniformément sur $]0,+\infty[$ de plus $\forall n \in N$ $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f_n(t-n)e^{-xt}\, dt = 0$ donc le théorème d'interversion des limites donne $\lim_{A\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = 0$.
- Montrons que la transformée de Laplace de f et F .

  Soit $x > 0$ alors $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} (-1)^n f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt$.

  Soit $A > 0$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x)\, e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^A (-1)^n f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt + \int_A^{+\infty} (-1)^n f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt\right]$$

puisque $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^A f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_A^A f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt$ sont convergentes car leurs termes sont majorés par $F_n(x)\, e^{-nx}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x)\, e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt$

on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^A f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt = \int_0^A \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(t-n)\, e^{-xt}\, dt$ (causalité des f_n)

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x)\, e^{-nx} = \int_0^A f(t)\, e^{-tx}\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-tx)}\, dt$

$x \in I(f)$ alors $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(t)\, e^{-tx}\, dt = F(x)$ et

$\lim_{A\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f_n(t-n)\, e^{-tx}\, dt = 0$

donc pour $x > 0$ $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x)\, e^{-nx}$

Troisième partie :

III.1.1.

a) La propriété est vraie pour n = 0 car f_1 et f_2 sont causales . Supposons la vraie pour n et montrons qu'elle l'est aussi pour n + 1 .

- $f_1(n) = f_2(n)$ car f_1 et f_2 sont continues sur **R** et égales sur $]-\infty, n[$
- sur $]n, n+1[$ $\quad f'_1(t) + f_1(t) + f_1(t-1) = 1$
  $\quad f'_2(t) + f_2(t) + f_2(t-1) = 1$

mais $t - 1 \in]n-1, n[$ donc $f_1(t-1) = f_2(t-1)$ et par suite f_1 et f_2 est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur $]n, n+1[$ donc $(f_1 - f_2)(t) = K e^{-t}$ $\forall t \in]n, n-1[$ or $f_1 - f_2$ est continue sur **R** et $(f_1 - f_2)(n) = 0$ donc $K = 0$ et donc $f_1 = f_2$ sur $]-\infty, n+1[$.

b) Soit f solution alors $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f'(t) + f(t) + f(t-1) = 1$
si $t \in]0,1[$ on a $f'(t) + f(t) = 1$ donc $f(t) = K e^{-t} + 1$. La causalité et la continuité de f donne $f(0) = 0 = K + 1$.
Ainsi pour $t \in]0,1[$ $f(t) = 1 - e^{-t}$. Si $t \in]1,2[$ alors $f'(t) + f(t) = e^{-(t-1)}$. La méthode de la variation de la constante , la continuité de f et $f(1) = 1 - e^{-1}$ donne $f(t) = t e^{-(t-1)} - e^{-t}$ $\forall t \in]1,2[$.
Si $t \in]2,3[$ alors $f'(t) + f(t) = 1 - (t-1) e^{-(t-2)} + e^{-(t-1)}$ un raisonnement analogue donne :

$$f(t) = 1 - \frac{t^2 e^{-(t-2)}}{2} + t e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)} + t e^{-(t-1)} - e^{-t} \ .$$

c) Il suffit d'examiner les dérivées en 1 et 2 car les expressions de f sur les divers intervalles , ont été déterminées en utilisant la continuité de f en 0 , 1 , 2 . En dérivant les expressions de f sur chacun des intervalle $]0,1[$, $]1,2[$ et $]2,3[$ et en passant à la limite il vient $f'_g(1) = e^{-1} = f'_d$; $f'_g(2) = e^{-1} - 2e^{-1} + e^{-2} = f'_g(2)$.

III.1.2.

a) $|f'(t)| e^{-xt} = |-f(t) - f_1(t) + U(t)| e^{-xt} \le |f(t)| e^{-xt} + |f_1(t)| e^{-xt} + U(t) e^{-xt}$ où $f_1(t) = f(t-1)$.
On sait que $\sigma(f) = \sigma(f_1) = 0$, $\sigma(u) = 1$.
pour $x > 0$ $t \mapsto f(t) e^{-xt}$, $t \mapsto f_1(t) e^{-xt}$ et $t \mapsto U(t) e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ donc $t \mapsto f'(t) e^{-xt}$ l'est aussi $\sigma(g) \le 0$.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$ on a d'après **II.1.** et **II2.2.** $x F(x) - f(o^+) + F(x) + e^{-x} f(x) = \dfrac{1}{2}$ en utilisant la causalité et la continuité de f on trouve : $(x + 1 + e^{-x}) F(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) On a $F(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x+1) e^x}}$. Comme $x > 0$, $0 < \dfrac{1}{(x+1) e^x} < 1$ alors $F(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{(x+1)^1}$.

Ainsi $F(x) = \displaystyle\sum_{n+0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{x(x+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n G_n(x) e^{-nx}$.

d) • On sait que $x \mapsto G_n(x) e^{-nx}$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto g_n(t-1)$ où $g_n(t) = U(t)\left(1 - e^{-t} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right)$.

- La série $\displaystyle\sum_n (-1) G_n(x) e^{-nx}$ est absolument convergente $\left(\left|(-1)^n G_n(x) e^{-nx}\right| = 0\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ (pour $x > 0$ fixé) .
- $\forall$ n g_n est est continue , positive (pour $t > 0$ on a : $e^{-t} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t\ k}{k!} \le e^{-t} e^t = 1$) .
- $t \mapsto g_o(t) = U(t)(1 - e^{-t})$ continûment dérivable sur $]0,+\infty[$.
- $\forall\ n \ge 1$ g_n est continûment dérivable sur **R** donc d'après **II.5.** on déduit que $t \mapsto g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g_n(t-n)$ est

définie , continue sur **R** , continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g \in E$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n G_n(x) e^{-nx}$ est la transformée de Laplace donc $g = f$.

Vérification : pour $0 < t < 1$ $g(t) = g_o(t) = 1 - e^{-t}$
pour $1 < t < 2$ $g(t) = g_o(t) - g_1(t-1) = t e^{-(t-1)} - e^{-t}$
je vous laisse le soin de continuer la vérification .

III.2.1. Soit $x > 0$, soit $A > 0$ une intégration par partie donne :

$$\int_0^A t e^{-xt}\ f''(t)\ dt = A\ e^{-xA}\ f'(A) - \int_0^A (1 - xt)\ e^{-xt}\ f'(t)\ dt$$

Une nouvelle intégration par partie donne :

$$\int_0^A t e^{-xt}\ f''(t)\ dt = A\ e^{-xA}\ f'(A) + \int_0^A (x A - 1)\ e^{-xA}\ f(A) + 1 \int_0^A (x' t - 2 x)\ e^{-xt}\ f(t)\ dt$$

or $\lim\limits_{A\to+\infty} A\ e^{-xA}\ f'(A) = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} (xA - 1)\ e^{-xA}\ f(A) = 0$ car $t \mapsto t\ e^{-xt}\ f'(t)$ et $t \mapsto t\ e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-xt}\ f(t)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ voir **II** donc on tire $\int_0^{+\infty} t\ e^{-xt}\ f''(t)\ dt = 1 + \int_0^{+\infty} (x^2 t - 2x)\ e^{-xt}\ f(t)\ dt$

$= 1 - x^2\ F'(x) - 2\ x\ F\ (x)$

d'une manière analogue on obtient : $\int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-xt}\ dt = -1 + x \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-nt}\ dt = -1 + x\ F(x)$

de la relation $t f''(t) + 2 f'(t) + x f(t) = 0$ on tire : $1 - x^2 F'(x) - 2 x F(x) + 2 x - 2 - F'(x) = 0$

c'est-à-dire $(x^2 + 1) F'(x) + 1 = 0$ donne F est solution , sur $]0,+\infty[$,de l'équation différentielle (L) $(x^2 + 1) y' + 1 = 0$.

Les solutions de (L) sont de la forme $x \mapsto y(x) = \mathrm{Arctan}\ (x) + K$.

III.2.2.

- On a pour $x > 0$ $F(x) = -\mathrm{Aretan}\ x + K$, d'après **II.4.3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ donc $K = \dfrac{\pi}{2}$.
- Trouvons une fonction f dont la transformée de Laplace F vérifie F = y

  on a $y'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ or $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto U(t)\sin t$ or pour $x > \sigma(f)$ on a :

  $F'(x) = \int_0^{+\infty} t\ f(t)\ e^{-xT}\ dt$ alors $f(t) = U(t)\dfrac{\sin t}{t} = f_5(t)$ convient .