CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1996
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT

Epreuve d'analyse

Transformée de Laplace.

DEFINITIONS ET NOTATIONS :

Le corps des réels sera noté **R** ; l'ensemble des entiers naturels sera noté **N** .

Une fonction f réelle ou complexe de variable réelle est dite causale si elle est nulle sur $]-\infty,0[$.

Si f est une fonction réelle ou complexe de variable réelle ,continue ou continue par morceaux sur **R** , causale , sa transformée de Laplace est la fonction $\boldsymbol{F}$, définie sur $I(f)$ par : $\boldsymbol{F}(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$, $I(f)$ désignant l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale généralisée converge absolument .

On note E l'ensemble des fonctions f réelles ou complexes de variable réelle , continues ou continues par morceaux sur **R** , causales , **telles que *I(f)* ne soit pas vide** . Dans tout le problème , on note $\boldsymbol{U}$ l'échelon unité défini sur **R** par :

$$\begin{cases} U(t)=1 \text{ si } t\geq 0 \\ U(t)=0 \text{ si } t<0 \end{cases}.$$

OBJECTIFS

Le problème est consacré à la définition de la transformation dite " de Laplace ", la démonstration de certaines de ses propriétés , puis à la mise en oeuvre de cette transformation dans la résolution de deux équations fonctionnelles.

La première partie est consacrée à l'étude , à partir d'exemples simples , de la nature de $I(f)$ et à des calculs de transformées.

Les propriétés démontrées au cours de la deuxième partie sont utilisées dans la résolution des équations fonctionnelles proposées dans la troisième partie. **La troisième partie peut donc être traitée en admettant les résultats annoncés dans les deux parties précédentes** .

Première Partie

Dans le cas où $I(f)$ est non vide , on désigne par $\sigma(f)$ sa borne inférieure si cet ensemble est minoré dans **R** ; on convient de poser $\sigma(f) = -\infty$ si cet ensemble n'est pas minoré.

I.1 Etude de *I(f)* sur quelques exemples simples

I.1.1 Dans le cas des fonctions qui suivent , montrer que la fonction f est élément de E ,et déterminer $I(f)$ et $\sigma(f)$:

a) Les fonctions f_1 définies sur **R** par : $f_1(t) = U(t)e^{at}$ où $a\in$ **R** .

b) Les fonctions f_2 définies sur **R** par : $f_2(t) = U(t)e^{ct}$, $c = a+i.\ b$ étant un nombre complexe quelconque , a et b réels .

c) Les fonctions f_3 définies par : $f_3(t)= U(t)t^a$ où $a\in\,]0,+\infty[$.

d) Les fonctions f_4 et f_5 telles que $f_4(0) = 0$, $f_5(0) = 1$, et pour tout $t\in R^*$,

$$f_4(t) = U(t)\frac{\sin^2 t}{t} \ , \ f_5(t) = U(t)\frac{\sin t}{t} .$$

(Pour étudier l'appartenance de $x= 0$ à l'ensemble $I(f_4)$, on peut , par exemple , utiliser une intégration par parties)

I.1.2 **a)** Trouver une fonction f telle que $I(f)$ contienne $\sigma(f)$.

b) Trouver une fonction f telle que $I(f)$ soit vide .

c) Trouver une fonction f telle que $I(f)$ = **R** .

I.2 Détermination de *I(f)* dans un cadre plus général .

Toutes les fonctions *f* considérées ci-dessous sont supposées causales , continues ou continues par morceaux sur R.

I.2.1 On suppose que f est bornée sur **R** , autrement dit , il existe un réel M tel que : $\forall\, t\in$ **R**, $|\ f(t)\ | \leq M$.

Déterminer $I(f)$ dans le cas où l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est divergente .

I.2.2 On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente. Prouver alors que $I(f) \supset [0,+\infty[$.

On suppose , en outre , l'équivalence $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Déterminer alors $I(f)$.

I.2.3 On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\,dt$ est convergente alors que l'intégrale

$\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est divergente . Après avoir donné un exemple d'une telle situation ,

montrer que : $I(f) =]0,+\infty[$.

I.3 Etude du cas général

On suppose que $I(f)$ est non vide.

I.3.1 Montrer que si $x_0 \in I(f)$, alors : $\forall\, x \in \mathbf{R}$ **,** $x \rangle x_0 \Rightarrow x \in I(f)$.

I.3.2 Donner la conclusion sur la nature de $I(f)$.

Dans tout ce qui suit , la transformée de Laplace d'une fonction f de E est la fonction F définie sur l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}$ dt .

I.4 Calcul de quelques transformées de Laplace

I.4.1 Calculer les transformées de Laplace , en précisant leurs domaines respectifs de validité , des fonctions (où l'on fait référence aux notations de **I.1.1**) f_1 , f_2 , f_3 (avec $a = n$ entier) , puis des fonctions $t \mapsto U(t)e^{at} \sin t$ et $t \mapsto U(t)e^{at} \cos t$ où a est un réel quelconque .

I.4.2 En utilisant certains des résultats de la question précédente , déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto U(t)\, t^n e^{-t}$ où n est un entier naturel . En utilisant une décomposition de fraction rationnelle et une linéarité découlant de la définition , déduire de ce qui précède une fonction g_n de E dont la transformée de Laplace est la fonction G_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $G_n(x) = \dfrac{1}{x(1+x)^{n+1}}$.

Deuxième Partie

<u>Propriétés de la transformation et des transformées de Laplace</u>

On rappelle que les fonctions f considérées sont causales , continues ou continues par morceaux .
Soient a un réel strictement positif et f une fonction de E dont la transformée est F . La fonction $t \mapsto f(t-a)$, notée f_a est une translatée de f . Montrer que f_a est encore dans E , déterminer $\sigma(f_a)$ en fonction de $\sigma(f)$, et la transformée de Laplace de f_a à l'aide de F .

II.2 Transformée d'une dérivée : Dans cette question , la fonction f est un élément de E , continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ et on suppose qu'il existe un élément g de E qui coïncide sur R^* avec f' .

II.2.1. Montrer que , quel que soit A positif et quelque soit x réel , on a :

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = \left[f(A)e^{-xA} - f(0_+)\right] + x\int_0^A f(t)e^{-xt}dt ,$$ où $f(0_+)$ désigne la limite de la fonction f en 0 suivant la partie $[0,+\infty[$.

II.2.2. En déduire que si $x > \mathrm{Max}\,(\sigma(f),\sigma(g))$, et si F et G désignant les transformées de Laplace de f et de g , alors : $G(x) = xF(x) - f(0_+)$.

On admettra que cette relation reste vraie si la dérivée de f est seulement continue par morceaux .

II.3 Dérivabilité d'une transformée de Laplace : Lorsque f est une fonction continue élément de E et de transformée F , on pose , pour n entier et pour $x > \sigma(f) : U_n(x) = \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt}dt$ de sorte que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x).$$

II.3.1. Montrer que U_n est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale .

II.3.2. Soient a et b fixés vérifiant : $\sigma(f) < b < a$. Montrer qu'il existe K indépendant de x tel que :
$\forall\, x \in [a,+\infty[\,, \forall\ t \in [0,+\infty[\,,\ \left|t f(t)e^{-xt}\right| \le K\left|f(t)\right|e^{-bt}$.

II.3.3. En déduire la convergence normale de la série des dérivées sur $[a,+\infty[$ puis la dérivabilité de F sur $]\sigma(f),+\infty[$ avec la formule : $F'(x) = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-xt}dt$ exprimant que F' est la transformée de $t \mapsto t\, f(t)$.

II.4 Limite à l'infini d'une transformée de Laplace : Soit f un élément de E de transformée F . On se donne A strictement positif .

II.4.1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt}dt = 0$

II.4.2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\, dt = 0$. Pour cela , on pourra faire une majoration de l'intégrale en utilisant un nombre a fixé dans $]\,\sigma(f), +\infty\,[$.

II.4.3. Donner la conclusion concernant la limite de $F(x)$ en $+\infty$.

II.5 Transformation de sommes de certaines séries .

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions éléments de E (donc causales) , de transformées respectives F_n définies sur $]0,+\infty[$ et telles que sur $]0,+\infty[$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n(x)e^{-nx}$ soit absolument convergente . On suppose de plus que les fonctions f_n sont continues positives , que f_0 est continûment dérivables sur $]0,+\infty[$ et que , pour $n \ge 1$, f_n est continûment dérivable sur **R**.

II.5.1. Montrer qu'on peut définir une fonction f sur **R** par $f(t)= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(t-n)$ et établir que cette fonction f est continue sur **R** et continûment dérivable sur $]0,+\infty[$.

II.5.2. Montrer que , quel que soit $x > 0$ et quel que soit $A > 0$, on a l'interversion :

$$\int_0^A \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t-n)e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^A f_n(t-n)e^{-xt}\, dt$$

. En déduire $f \in E$.

II.5.3. Montrer que $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t-n)e^{-xt}dt = 0$. En déduire finalement que la transformée de Laplace de f est la fonction F définie par : $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n(x)e^{-nx}$.

Troisième Partie

III.1 Résolution d'une équation différentielle avec retard .

On se propose de trouver une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

(C): • f est élément de E ,continue, continûment dérivable sur $]0,+\infty[$.

• f' est définie sur R^* et coïncide sur R^* avec une fonction g élément de E.

• pour tout $t \neq 0$ on a l'égalité : **(*)** $f'(t)+ f(t)+f(t-1) = U(t)$.

III.1.1 Résolution partielle par une méthode élémentaire

a) On suppose que f_1 et f_2 sont deux éléments de E vérifiant les conditions (C). Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout n entier , les fonctions f_1 et f_2 coïncident sur l'intervalle $]-\infty,n[$.

b) Résoudre l'équation sur chacun des intervalles $]0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$.

c) En déduire qu'il existe une fonction continue sur $]-\infty,3[$, nulle sur $]-\infty,0[$, continûment dérivable sur $]0,3[$ et solution sur $]0,3[$ de l'équation **(*)** .

III.1.2 Utilisation de la transformation de Laplace .

On admet l'existence d'une fonction f vérifiant les conditions (C), avec $\sigma(f)= 0$. On note g une fonction élément de E qui coïncide avec f' sur R^* .

a) Montrer que $\sigma(g) \leq 0$.

b) Montrer que la transformée F de f vérifie , dans un intervalle que l'on précisera , la relation :

$$(1+x+e^{-x})\,F(x) = \frac{1}{x} \ .$$

c) En déduire : $\forall x \rangle 0$, $F(x) = \sum_{n-0}^{\infty} (-x)^n G_n(x) e^{-nx}$, les fonctions G_n étant celles de la question **I.4.2** .

d) On admet que deux fonctions continues sur **R**, éléments de E , et ayant même transformée de Laplace , sont identiques. En utilisant la question **II.5** , déterminer la solution du problème sous forme d'une série de translatées. On pourra comparer avec les résultats de **III.1.1.**

III.2 Résolution d'une équation différentielle du second ordre

On se propose de trouver une fonction f élément de E , continûment dérivable à l'ordre 2 sur $]0,+\infty[$, telle que les fonctions f' et f'' , définies sur R^* , coïncident sur R^* avec des éléments g et h de E , qui soient solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $ty''+2y'+ty = 0$, avec la condition initiale $y(0_+) = 1$. On suppose qu'une telle fonction existe avec $\sigma(g) \leq 0$ et $\sigma(h) \leq 0$.

Soit F la transformée de f .

III.2.1. Montrer que F est solution de l'équation différentielle : $(x^2+1)Y'+1 = 0$ dans un intervalle que l'on précisera . Résoudre cette équation différentielle.

III.2.2. Déterminer F en utilisant la question **II.4** , et trouver une fonction f dont la transformée de Laplace F vérifie $F = Y$.

=====================