# CONCOURS COMMUN ARCHIMÈDE 1997

**Durée : 4 heures** **Option : MP**

**Partie I**

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique $(i, j, k)$ soit orthonormale directe.
Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on définit la matrice

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $f_u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M_u$ dans la base $(i, j, k)$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_u$, $u \in \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes $f_u$, $u \in \mathbb{R}^3$.

**A.**

**1.** Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels de dimension 3.

**2.** Soit $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$. Calculer $M_u M_v$ et montrer que $M_u M_v \in \mathcal{M}$.
En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre. Est-elle commutative ?

**3.** On note $\varphi$ et $q$ les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} \varphi(u) = (u|i + j + k) \\ q(u) = \|u\|^2 - (u|f_j(u)) \end{cases}$$

- **a.** Montrer que $\varphi$ est une forme linéaire et que $q$ est une forme quadratique positive.
Est-ce que $q$ est définie positive ?
- **b.** Calculer le déterminant de $M_u$ en fonction de $\varphi$ et $q$. En déduire que $f_u$ n'est pas bijective si et seulement si $u$ appartient à un plan (dont on donnera l'équation) ou à son orthogonal.

**4.**
- **a.** Montrer que tous les endomorphismes $f_u$ ont un vecteur propre unitaire en commun que l'on notera $w_1$.
- **b.** Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur $u$ pour que $f_u$ soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et donner alors les valeurs et les vecteurs propres de $f_u$.
- **c.** On note $w_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$ et $w_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel engendré par $w_2$ et $w_3$.
  - i. Montrer que $(w_1, w_2, w_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
  - ii. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}$ est stable par $f_u$.
- **d.** Diagonaliser $f_{2i+j+k}$.

**B.** Soit $\Psi : u \mapsto f_u(u)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et $P_m$ le polynôme $P_m(X) = X^3 - X^2 + m$ où $m$ désigne un paramètre réel.

**1.**
- **a.** Caractériser les éléments de $U = \Psi^{-1}(i)$.
- **b.** Montrer que $U$ est réunion de deux cercles $U_1$ et $U_2$ dont on donnera le centre et le rayon (on appellera $U_1$ celui dont le centre a des coordonnées positives dans la base canonique).
- **c.** Montrer que $f_u$ est une rotation si et seulement si $u \in U_1$.

**2.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que $P_m$ admette trois racines réelles (éventuellement confondues).

**3.** Montrer que pour $u=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $M_u$ est la matrice d'une rotation si et seulement si $a$, $b$ et $c$ sont les racines de $P_m$ avec $m\in\left[0,\dfrac{4}{27}\right]$.

**4.** Étudier $f_u$ pour $u=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ et donner ses éléments caractéristiques.

**C.** On dit que l'on définit une action à droite $\theta$ d'un groupe $(G,\star)$, d'élément neutre $e$ sur un ensemble $X$ si $\theta$ est une application de $G\times X$ dans $X$ vérifiant pour tout $x\in X$ et tout $g\in G$ et $g'\in G$

$$\theta(e,x)=x$$
$$\theta\left(g,\theta(g',x)\right)=\theta(g'\star g,x)$$

Enfin, si $x\in X$ on appelle orbite de $x$, que l'on notera $\mathcal{O}_x$, l'ensemble des éléments $\theta(g,x)$ pour $g\in G$.

On note $\mathfrak{S}_3$ le groupe des bijections de $\{1,2,3\}$ dans lui-même.

**1.** Montrer que $\mathfrak{S}_3$ a 6 éléments que l'on précisera.

**2.** Pour $\tau\in\mathfrak{S}_3$ et $u=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, on note $\theta(\tau,u)=\left(a_{\tau(1)},a_{\tau(2)},a_{\tau(3)}\right)$. Montrer que si $u\in U_1$ alors $\theta(\tau,u)\in U_1$ puis montrer que $\theta$ définit une action de $\mathfrak{S}_3$ sur $U_1$.

**3.** Montrer que les orbites des éléments de $U_1$ ont 6 éléments sauf deux d'entre elles, que l'on précisera, qui n'en possèdent que trois.

Pour les deux orbites ayant 3 éléments donner toutes les rotations associées en précisant succintement leurs éléments caractéristiques.

**4.** Soit $u=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f_u$ soit une rotation et que son orbite ait 6 éléments. Soit $v$ et $w$ respectivement les éléments de $\mathcal{O}_u$, $v=(b,c,a)$ et $w=(c,a,b)$. On note par $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les mesures des angles des rotations $f_u$, $f_v$ et $f_w$.

**a.** Calculer

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\\
\sigma_2 &= \cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha\\
\sigma_3 &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

(Utiliser les propriétés de la trace d'un endomorphisme)

**b.** En déduire que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont les trois racines du polynôme $X^3-(3/4)X+(27abc-2)/8$.

**c.** Trouver les six rotations pour $abc=2/27$.

**Partie II**

**1.** Pour $p$, entier non nul fixé, on considère l'ensemble $\mathcal{I}_p$ des suites $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+p}=a_n$.

**a.** Montrer que $\mathcal{I}_p$ est un espace vectoriel de dimension $p$.

**b.** Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle de $\mathcal{I}_p$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$.

**c.** On note $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des suites $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}_p$ telles que $\sum\limits_{n=0}^{p-1}a_n=0$.

Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel de $\mathcal{I}_p$ ?

**d.** Montrer que les fonctions $f$ définies par $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ pour $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a \in \mathcal{P}_1$, sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1]$.

**2.** On considère l'ensemble $S$ des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$, on note $h_k$ l'application définie par $h_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x^p)}$ pour tout $x$, $x \in \ ]-1, 1[$.

**a.** Montrer que $h_0$, $h_1$, …, $h_{p-1}$ sont des éléments de $S$ et donner leur développement en série entière.

**b.** On note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions $f$ de $S$ telles que la suite des coefficients de leur série entière soit un élément de $\mathcal{I}_p$.

i. Montrer que la famille $(h_k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{F}_p$.

ii. Montrer que $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{F}_p$ sont isomorphes.

**3.** On définit sur $\mathcal{F}_3$ l'opération :

$$(f|g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{f''(0)g''(0)}{4}.$$

**a.** Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}_3$ et que $\mathcal{B} = (h_0, h_1, h_2)$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_3$.

**b.** Pour $x \in \ ]-1, 1[$ on définit :
$g_0(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{3}}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{(1+x+x^2)\sqrt{2}}$ et $g_2(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{6}}$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, g_2)$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_3$ et donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

**4.** Pour $f \in \mathcal{F}_3$ on définit $g_f$ sur $]-1, 1[$ par :

$$g_f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g_f(0) = \lim_{x \to 0} g_f(x).$$

**a.** Montrer que $g_f \in \mathcal{F}_3$.

**b.** On appelle $\varphi$ l'application de $\mathcal{F}_3$ dans $\mathcal{F}_3$ qui à $f$ fait correspondre $g_f$. Montrer que $\varphi$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

**c.** Soit $f \in \mathcal{F}_3$ telle que la limite quand $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures est finie.
Montrer que $\varphi(f) \in \mathcal{F}_3$ admet aussi une limite quand $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures. Déterminer ces limites pour $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$.

**5.** On considère l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ qui vérifient l'équation différentielle

$$(1 - x^3)y''' - 9x^2y'' - 18xy' - 6y = 0. \tag{1}$$

**a.** Chercher les solutions développables en série entière et montrer que ce sont des éléments de $\mathcal{F}_3$. Les a-t-on tous ?

**b.** On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$. Pour ceci, si $g$ est solution de (1) sur un intervalle $I$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, déterminer l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par $f$, où $f(x) = (1 - x^3)g(x)$.
Déterminer $f$ et déduire les solutions de (1) sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Étudier les prolongements des solutions en 1 et donner toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$.