Partie I

1.1 La suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k+1} - \ln(n)$ est convergente

Montrons pour cela que la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ est convergente.

$$v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Donc la suite de terme général v_n est équivalente, quand n tend vers l'infini à $-\frac{1}{n^2}$, donc est négative pour n assez grand, et donc la série de terme général v_n est convergente.

1.2 Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) Première méthode
Le programme PT fournit un théorème qui donne le résultat immédiatement !
On sait que pour tout x réel, $-1 < x < 1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Quand on remplace x par 1 dans la série de droite, on obtient une série convergente, en vertu du théorème sur les séries alternées. Donc la valeur de la série de droite est la limite de l'expression de gauche quand x tend vers 1, donc $\ln(2)$. Le problème propose une autre méthode, qu'on va expliquer maintenant.

a) Deuxième méthode
On pose conformément à l'indication :

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= u_{2n+1} + \ln(2n+1) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= u_{2n+1} + \ln(2n+1) - (u_n + \ln(n)) \\
&= u_{2n+1} - u_n + \ln(2 + \frac{1}{n})
\end{aligned}$$

D'après la question I.1 la suite de terme général u_n tend vers une limite et donc la suite de terme général $u_{2n+1} - u_n$ tend vers 0 (On remarquera que l'indication fournie est imprécise). Finalement on voit que s_{2n} et donc s_n tendent vers $\ln(2)$.

1.3 Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ à 10^{-6} près

La question est imprécise : le calcul effectif dépend évidemment de la précision disponible dans le calcul des approximations des $\frac{(-1)^k}{k+1}$. Si la question est seulement de trouver n tel que tel que le reste d'ordre n de la série soit inférieur à 10^{-6} la réponse est sans ambiguité avec les termes du programme : les candidats doivent savoir que le reste d'ordre n est inférieur en valeur absolue à la valeur absolue du premier terme négligé.

Une solution est alors, en prenant les notations de la question précédente et si c'est s_n qu'on calcule, que le reste r_n vérifie :

$$|r_n| < \frac{1}{n+2}$$

et donc imposer $r_n < 10^{-6}$ impose $n+2 > 10^6$ et donc $n > 999\ 998$, $n \geq 999\ 999$.
Mais cela ne donne nullement une véritable approximation car alors il faut tenir compte des majorants d'erreurs sur les calculs numériques des termes de s_n.
Examinons ce qui se passe dans un calcul réel, en supposant qu'on dispose de moyens de calcul permettant d'avoir un majorant d'erreur sur chaque calcul de 10^{-16}, ce qui est vrai pour un ordinateur de bureau, presque tous les compilateurs, et Maple V en le demandant.
Si on réserve par exemple 10^{-8} pour l'erreur de calcul machine, il reste $0,99\ 10^{-6}$ pour l'erreur de méthode (le reste) et donc, comme ci-dessus : $n+2 > \frac{1}{(0,99\ 10^{-6})}$. Comme $1/0,99 \leq 1,010\ 102$ il suffit de prendre $n > 1\ 010\ 100$, $n \geq 1\ 010\ 101$. Comme $1\ 010\ 101 * 10^{-16} < 10^{-5}$ le calcul numérique approché de $s_{1\ 010\ 101}$ donne $\ln(2)$ à 10^{-6} près.
Dans un calcul réel où un majorant d'erreur sur chaque calcul est 10^{-10}, ce qui est courant sur les calculettes de poche, les choses changent radicalement.

1.4 Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ à 10^{-6} près

La question est tout aussi imprécise que la précédente pour la même raison. L'auteur du sujet suppose implicitement que pour avoir une approximation de

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

on va calculer une valeur approchée de

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$$

c'est à dire négliger le reste

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

Or ça n'a rien d'évident, car on peut essayer d'estimer s_n plus finement. De toutes façons, il faut tenir compte du majorant de l'erreur sur le calcul numérique de s_n.
Rédigeons une solution : Pour tout k entier supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k2^k} < \frac{1}{2^k}$ et donc

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$$

Si par exemple on veut que $r_n < 5\ 10^{-7}$ (on réserve $5\ 10^{-7}$ aussi pour les erreurs de calcul sur les termes de s_n), on doit prendre :

$$\frac{1}{2^n} < 5\ 10^{-7}$$

soit

$$2^n > 10^7/5 = 2\ 000\ 000$$

ou

$$n > \frac{\ln(2\ 000\ 000)}{\ln(2)}$$

$n \geq 21$ convient.
Attention d'autres méthodes d'estimation du reste sont possibles, il y a beaucoup de réponses correctes (elles sont *suffisantes*).

Bien entendu, même avec une calculette, les erreurs dues aux calculs numériques des 21 termes sont acceptables.
On remarquera que l'énoncé ne demande pas de calcul numérique effectif.

Partie II

2.1.1 Si la suite u converge vers 0, la suite v converge vers 0

Pour tout n_0 entier inférieur ou égal à n :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k$$

Écrivons que la suite u tend vers 0 quand n tend vers l'infini : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 entier tel que pour tout n entier, $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$.
Alors pour $n \geq n_0$:

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\varepsilon = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k| + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k| + \varepsilon$$

Le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k|$ est un nombre réel positif qui ne dépend pas de n et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k| = 0$$

(Il existe n_1 entier tel que $n \geq n_1$ entraine : $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k| \leq \varepsilon$). Donc pour n plus grand que le plus grand de n_0 et de n_1 :

$$|v_n| \leq 2\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si la suite u converge vers L, la suite v converge vers L
Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite de terme général $u_n - L$ car

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} L = L$$

et la suite de terme général v_n est changée en la suite de terme général $v_n - L$.

2.1.2 Convergence des suites u et v si $u_n = e^{2i\pi n\theta}$

Si u_n tend vers une limite l, u_{n+1} aussi et donc $u_n - u_{n+1}$ tend vers 0. Or :

$$|u_n - u_{n+1}| = |e^{2i\pi n\theta}||1 - e^{2i\pi\theta}| = |1 - e^{2i\pi\theta}| \neq 0$$

si θ n'est pas entier. Donc la suite u n'est pas convergente si θ n'est pas entier.

Étudions la suite v.

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi n\theta} = \frac{1}{n+1}\frac{1 - e^{2i\pi(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\pi\theta}}$$

Comme n n'est pas entier, $e^{2i\pi\theta} \neq 1$ et

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\frac{2}{|1-e^{2i\pi\theta}|}$$

et donc la suite v tend vers 0.

2.2.1 Si la suite u converge vers L, la suite w converge vers L

Comme dans la question 2.1.1, il suffit de montrer que w tend vers 0 si u tend vers 0 car :

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$$

Pour tout n_0 entier inférieur ou égal à n :

$$w_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}u_k + \frac{1}{2^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}u_k$$

Écrivons que la suite u tend vers 0 quand n tend vers l'infini : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 entier tel que pour tout n entier, $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$.
Alors pour $n \geq n_0$:

$$|w_n| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k| + \varepsilon$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}|u_k|$ qui est est un nombre réel positif qui ne dépend pas de n et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k| = 0$$

(Il existe n_1 entier tel que $n \geq n_1$ entraine : $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k| \leq \varepsilon$). Donc pour n plus grand que le plus grand de n_0 et de n_1 :

$$|w_n| \leq 2\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.2.2 Exemple de suite u divergente telle que la suite w converge

Si $u_n = (-2)^n$, évidemment divergente,

$$w_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k = \frac{1}{2^n}(1-2)^n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

w_n est convergente vers 0.

2.3.1 Démonstration de la formule $u_0^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u_j$

En fait, quand on examine les premiers éléments des suites $u^{(0)}$, $u^{(1)}$,$u^{(2)}$, $u^{(3)}, \ldots$, on se rend vite compte que la formule générale est :

$$u_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u_{n+j}$$

Or celle-ci est *beaucoup* plus facile à démontrer par récurrence sur k que la formule demandée. En fait il aurait été plus facile que ce qui est demandé de ne pas donner la formule générale, de la faire deviner puis démontrer.

La formule est évidemment vraie pour $k = 0$.
Supposons vraie la formule :

$$u_n^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_{n+j}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
u_n^{(k)} &= u_n^{(k-1)} + u_{n+1}^{(k-1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_{n+j} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_{n+1+j} \\
&= \binom{k-1}{0} u_n + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_{n+j} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} u_{n+i} \qquad (i = j+1) \\
&= \binom{k-1}{0} u_n + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_{n+j} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j-1} u_{n+j} + \binom{k-1}{k-1} u_{n+k} \\
&= u_n + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} \right] u_{n+j} + u_{n+k} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_{n+j}
\end{aligned}$$

2.3.2 Démonstration de la formule $S_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} s_k$

Nous allons démontrer la formule par récurrence sur n. D'abord elle est vraie pour $n = 0$:

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{u_0^{(k)}}{2^{k+1}} = \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k+1} s_k = \frac{s_0}{2} = \sum_{k=0}^{0} \frac{u_k}{2} = \frac{u_0}{2}$$

Supposons la formule vraie au rang n et démontrons la au rang $n + 1$.

$$2^{n+2} S_{n+1} = 2^{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_0^{(k)}}{2^{k+1}} + \frac{u_0^{(n+1)}}{2^{n+2}} \right)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_0^{(k)}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} s_k$$

et d'après 2.3.1

$$u_0^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_k$$

Donc :

$$2^{n+2} S_{n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} s_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_k$$

Or $u_k = s_k - s_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $u_0 = s_0$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
2^{n+2}S_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}s_k + \left[\binom{n+1}{0}s_0 + \binom{n+1}{1}(s_1 - s_0) + \cdots + \binom{n+1}{n+1}(s_{n+1} - s_n)\right] \\
&= 2\binom{n+1}{1}s_0 + 2\binom{n+1}{2}s_1 + \cdots + 2\binom{n+1}{n+1}s_n \\
&\quad + \binom{n+1}{0}s_0 + \binom{n+1}{1}(s_1 - s_0) + \cdots + \binom{n+1}{n+1}(s_{n+1} - s_n) \\
&= \left[2\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1}\right]s_0 + \cdots + \left[2\binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{j+1}\right]s_j \\
&\quad + \cdots + \left[2\binom{n+1}{n+1} + \binom{n+1}{n} - \binom{n+1}{n+1}\right]s_n + \binom{n+1}{n+1}s_{n+1}
\end{aligned}$$

Mais :

$$2\binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{j+1} = \binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j} = \binom{n+2}{j+1}$$

et d'autre part :

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{n+2}$$

Donc :

$$2^{n+2}S_{n+1} = \binom{n+2}{1}s_0 + \cdots + \binom{n+2}{j+1}s_j + \cdots + \binom{n+2}{n+2}s_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}s_k$$

2.3.3 Si la série $\sum u_n$ converge vers S, il en est de même pour la série $\sum \frac{u_0^{(n)}}{2^{n+1}}$

Par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$. Comme :

$$S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}s_k$$

d'après 2.2.1, (si u_n tend vers L, il en est de même pour w_n), S_n tend vers S. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{u_0^{(k)}}{2^{k+1}} \text{ tend vers } S \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

2.3.4 Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$

La formule du binôme de Newton donne :

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k$$

Intégrons les deux membres entre 0 et x :

$$\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

Calcul de $u_0^{(n)}$ si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

En remplaçant :

$$u_0^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j+1}$$

ce qui revient à prendre $x = 1$ dans la formule précédente :

$$u_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}$$

Calcul d'une valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u_0^{(n)}}{2^{n+1}}$

On voit qu'il s'agit de calculer $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$. On reconnait la question 1.4 : il suffit de prendre $n \geq 21$.

Partie III

3.1 Calcul de $B_1(u)$ et $B_2(u)$ si $u_n = (-1)^n$

Avec les mêmes notations que dans les questions précédentes :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

donc $s_{2p} = 1$ et $s_{2p+1} = 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k}{n!} x^n \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \mathrm{ch}(x) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(u) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.2 Rayon de convergence des séries entières $\sum \dfrac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \dfrac{s_n}{n!} x^n$

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, la suite de terme général s_n converge et bien sur la suite de terme général u_n converge vers 0. Donc les deux suites sont bornées.

Montrons par exemple que la série $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ est absolument convergente pour tout x dans $\mathbb{R}$. Il existe M dans $\mathbb{R}$, $M > 0$, tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M$$

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|\frac{u_n}{n!}x^n| \leq M\frac{|x|^n}{n!}$$

Nous reconnaissons le terme général de la série entière de somme $e^{|x|}$, dont le rayon de convergence est infini. Donc la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini.
Même démonstration évidemment pour la série $\sum \frac{s_n}{n!}x^n$.

3.3 Calcul de $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{dx}{x}$

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{dx}{x} = \ln(2\varepsilon) - \ln(\varepsilon) = \ln(2)$$

Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$

L'intégrale est généralisée en 0 et en l'infini. En 0 la fonction est prolongeable par continuité car :

$$\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = \frac{1-x-1+2x+x\varepsilon(x)}{x}$$

avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. En $+\infty$, comme

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = 0$$

la fonction est majorée en valeur absolue par $1/x^2$ pour x assez grand, donc l'intégrale est convergente.
Pour la calculer posons :

$$I = \int_a^A \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx = \int_a^A \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_a^A \frac{e^{-2x}}{x}dx$$

dans la deuxième intégrale effectuons le changement de variable $u = 2x$:

$$I = \int_a^A \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_{2a}^{2A}\frac{e^{-u}}{u}du = \int_a^A \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_{2a}^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx = \int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx - \int_A^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx$$

Alors :

$$\inf_{x\in[a,2a]} e^{-x}\int_a^{2a}\frac{1}{x}dx \leq \int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq \sup_{x\in[a,2a]} e^{-x}\int_a^{2a}\frac{1}{x}dx$$

$$e^{-2a}\int_a^{2a}\frac{1}{x}dx \leq \int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq e^{-a}\int_a^{2a}\frac{1}{x}dx$$

$$e^{-2a}\ln(2) \leq \int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq e^{-a}\ln(2)$$

De même :

$$\inf_{x\in[A,2A]} e^{-x}\int_A^{2A}\frac{1}{x}dx \leq \int_A^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq \sup_{x\in[A,2A]} e^{-x}\int_A^{2A}\frac{1}{x}dx$$

$$e^{-2A}\int_A^{2A}\frac{1}{x}dx \leq \int_A^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq e^{-A}\int_A^{2A}\frac{1}{x}dx$$

$$e^{-2A}\ln(2) \leq \int_A^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx \leq e^{-A}\ln(2)$$

Quand a tend vers 0, $\displaystyle\int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx$ tend vers $\ln(2)$ et quand A tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_A^{2A}\frac{e^{-x}}{x}dx$ tend vers 0. Finalement :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx = \ln(2)$$

Calcul de $B_2(u)$ si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

$$B_2(u) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}\Big)dx = \int_0^{+\infty}\frac{-e^{-x}}{x}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big)dx = \int_0^{+\infty}\frac{-e^{-x}}{x}\Big(e^{-x}-1\Big)dx$$

D'après la question précédente :

$$B_2(u) = \ln(2)$$

3.4 Existence de $B_1(u)$

Par définition :

$$B_1(u) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n\geq 0}\frac{\sum_{k=0}^n q^k}{n!}x^n$$

Si $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}
B_1(u) &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n\geq 0}\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)n!}x^n \\
&= \frac{1}{1-q}\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} - q\sum_{n\geq 0}\frac{(qx)^{n+1}}{n!}\Big) \\
&= \frac{1}{1-q}\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\Big(e^x - qe^{qx}\Big) \\
&= \frac{1}{1-q}\lim_{x\to+\infty}\Big(1 - qe^{(q-1)x}\Big)
\end{aligned}$$

Donc si $q > 1$ il n'y a pas de limite et si $q < 1$:

$$B_1(u) = \frac{1}{1-q}$$

Si enfin $q = 1$,

$$B_1(u) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n-1)!} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}xe^x = +\infty$$

Existence de $B_2(u)$

Par définition :

$$B_2(u) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(qx)^n}{n!}\Big)dx = \int_0^{+\infty} e^{(q-1)x}dx$$

Donc $B_2(u)$ existe si $q < 1$ et alors :

$$B_2(u) = \frac{1}{1-q}$$