Mines-Monts MP, Mathématiques I
Épreuve de 3 heures du 5 mai 1997
version α 0.1

Philippe ESPERET*(Henri IV, Paris)
Georges VIDIANI†(Carnot, Dijon)

5 mai 1997

Introduction

1. Titre proposé : “Approximation par polynômes trigonométriques”.
2. Épreuve adaptée au programme (sujet, longueur, difficulté), qui permettra de bien classer les candidats à Mines-Ponts.
3. Pas de problèmes d’énoncé, les critiques qui suivent sont de détail, et ne compromettent pas la qualité et le professionalisme du sujet. On ne comprend pas toujours pourquoi le problème fait admettre en cours de route des questions simples. L’utilité de la distinction “f constante ou non” n’apparaît pas clairement au II-3.

Première partie

1. (a) Un calcul immédiat de dérivée donne $\Psi(x) = R(\sin x)$ avec $R(z) = \frac{6-4z^2}{z^4}$.

*esperet@marie.polytechnique.fr
†101702.425@Compuserve.com

(b) La relation que l'on demande d'admettre est évidente (série géométrique). On élève au carré la formule de la question précédente pour voir que seuls subsistent des e^{ikx} avec k pair. Le degré de Q_n est $n-1$.

(c) Le degré du produit de deux polynômes trigonométriques n'est pas toujours la somme des degrés, mais ici l'on n'a que des polynômes pairs (les fonctions concernées, convenablement définies sur $\mathbf{Z}$, sont paires et il y a unicité de l'écriture pour un polynôme trigonométrique). On écrit $6 - \sin^2 x = 4 + e^{2ix} + e^{-2ix}$ pour obtenir que le degré de P_n est $2(n-1)+1 = 2n-1$.

2. (a) On suit le schéma de la démonstration du théorème de Dirichlet. On remplace $c_k(f)$ par sa valeur pour obtenir (expression dans laquelle $\int_P g$ désigne l'intégrale de la fonction périodique g) :

$$4n^3 \cdot 2\pi \cdot \pi_n^f(x_0) = \int_P f(u)(\sum_k a_{-k} e^{ik(x_0-u)})du.$$

On pose $u = v + x_0$ et l'on observe que l'intervalle de sommation en k est symétrique par rapport à l'origine. On a :

$$4n^3 \cdot 2\pi \cdot \pi_n^f(x_0) = \int_P f(x_0+v)(\sum_k a_k e^{ikv})dv,$$

expression dans laquelle on reconnaît $P_n(v)$.
On pose enfin $v = 2w$ pour conclure à la formule avec $C = \frac{1}{4\pi}\cdot$

3. (a) La fonction donnée est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) par morceaux, donc redevable de Parseval.
Le calcul donne :

$$c_n(f) = \frac{(-1)^n \sin u}{n\pi + u}\cdot \tag{1}$$

REMARQUE : ce calcul n'est valide que parce que I ne contient ni 0, ni π.

(b) La formule de Parseval fournit quant à elle :

$$\sum \frac{\sin^2 u}{(n\pi+u)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_P |\phi_u|^2 = 1. \tag{2}$$

Ainsi, il y égalité entre les deux expressions proposées.

(c) On va utiliser (deux fois) le théorème suivant : soit une série u_k de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, qui converge simplement sur I (notons U sa somme) et dont la série des dérivées converge normalement sur tout compact de I. Alors U est $\mathcal{C}^1$ sur I, avec, pour tout x de I l'égalité $U'(x) = \sum u_k'(x)$.

On isole les contributions de $k = 0$ et de $k = -1$. Pour les autres k, la minoration $|u + k\pi| \geq (|k| - 1)\pi$ permet de conclure.

4. (a) Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ y est bornée (même si elle n'atteint pas nécessairement ses bornes). Ici f est bornée sur $[0, 2\pi]$ et 2π-périodique, donc bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) $t \mapsto \frac{\sin^4(nt)}{t^4}$ est analytique sur $\mathbf{R}$, donc $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi G est continue par morceaux (sur tout compact), donc L.C.I. (localement intégrable) sur $\mathbf{R}$. La majoration $|G(t)| \leq \frac{\|g\|}{t^4}$ sur $[1, \infty[$ (ou encore $]-\infty, -1]$) permet de conclure à l'intégrabilité de G sur $\mathbf{R}$ (théorèmes de comparaison pour les fonctions positives).

(c) Seuls les cas $k = 0$ et $k = -1$ sont à prendre en compte. L'argument d'analycité déjà évoqué plus haut permet de conclure quand $k = 0$, et un changement de variable $u - \pi = h$ y ramène quand $k = -1$.

(d) Après Chasles et translation ramenant à l'intervalle $[0, \pi]$, les deux intégrales proposées sont égales.

(e) On utilise la version suivante du théorème de convergence dominée :

Soit u_n une série de fonctions intégrables sur un intervalle J. En posant $v_n = |u_n|$, on suppose que la série v_n converge simplement sur J (sauf peut-être en un nombre fini de points) et que la série $\int_J v_n$ converge.

Alors la somme U de la série (définie évidemment, au moins sur le complémentaire d'un ensemble fini) est intégrable, et $\int_J U = \sum \int_J u_k$.

Ici, parce que l'on sait G intégrable sur $\mathbf{R}$, on a $\int_{-p\pi}^{(p+1)\pi} G$ qui tend vers $\int_{\mathbf{R}} G$ par conséquence de la convergence dominée (ou par évidence, cela dépend de la théorie sous-jacente).

Dans notre cas, $v_k = \frac{1}{(u+k\pi)^4}$ est bien intégrable ($k \neq 0$ et $k \neq -1$) et un calcul immédiat de primitives montre que la série des intégrales converge.

Finalement, on peut également passer à la limite dans le membre de droite de la formule proposée pour obtenir :

$$6\int_{\mathbf{R}} G = \int_{(0,\pi)} g(2u)\psi(u)\sin^4(nu)du. \tag{3}$$

REMARQUE : une version conforme aux programmes d'avant 1997, version sans la convergence dominée, serait possible et certainement plus simple (en utilisant une convergence normale de la série de fonction $\frac{1}{(u+k\pi)4}$ sur $[0,\pi]$ (pour $|k| \geq 2$).

5. (a) La fonction f est bornée ainsi que le sinus : comme la fonction proposée est L.C.I., on peut conclure par théorèmes de comparaison.

   (b) On applique la formule (3) avec $g : u \mapsto f(x+u)$ et l'on pose $nt = u$. Il reste $6C\int_{\mathbf{R}} f(x+\frac{2u}{n})\frac{\sin^4 u}{u^4}du$.
   Comme $C = \frac{1}{4\pi}$, on conclut.

   (c) Pour $n = 1$, on a déjà calculé P_1 dont le terme constant est $a_0^{(1)}$, lequel vaut 4. Alors $\pi_1^1 = \frac{3}{2\pi}\cdot\int_{\mathbf{R}}\frac{\sin^4 t}{t^4}dt = \frac{1}{n^4}a_0^{(1)} = 1$ (le “quart” vient de $1/4n^3$ avec $n = 1$).
   L'intégrale vaut donc $\frac{2\pi}{3}$.
   REMARQUE : Mathematica donne la réponse :

```
Integrate[Sin[x]^4/x^4,{x,0,Infinity}]
Pi
--
3
```

   On en déduit que les $\pi_n^{\bar{1}}$ valent 1, ce qui est normal dans la perspective du problème (on veut tout de même montrer que – sous des hypothèses raisonnables, on a $\pi_n^f \to f$).

Seconde partie

1. (a) Comme la fonction est bornée, les différences $|f(x+h) - f(x)|$ sont toutes majorées par $2\|f\|$, et le sup existe.

   (b) Il est évident que la fonction est croissante et vaut 0 en 0.
   REMARQUE : les trois propriétés que l'on demande d'admettre semblent faciles. La première se démontre en coupant en n petits

intervalles, la seconde en écrivant $t = \lfloor t \rfloor + \rho$. Pour la troisième, on suppose $\omega(t) = 0$ et alors ω est nulle sur $[0, t]$ (monotonie). Maintenant on peut aller de n'importe quel x à n'importe quel y $(x < y)$ par pas plus petits que t et cela permet de conclure.

2. (a) On sait que f, continue et périodique, est uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ donné, un η d'uniforme continuité de f associé et $0 < t' - t < \eta$.

   Pour tout h' $(0 < h' < t')$, on peut choisir un h $(0 < h < t)$ avec $0 < h' - h < t' - t$ (par l'absurde). Alors, pour tout x on a :

$$\begin{aligned} |f(x+h') - f(x)| &\leq |f(x+h') - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq |f(x+h') - f(x+h)| + \omega(t). \end{aligned}$$

   Alors on voit que $\omega(t') \leq \varepsilon + \omega(t)$, et la conclusion s'ensuit.

   REMARQUE : en réalité, ω est constante sur $[2\pi, \infty[$, égale à $|\sup f - \inf f|$.

3. (a) Je ne vois pas où intervient cette histoire de constante : si f est constante, on a déjà vu que l'inégalité est triviale car le membre de gauche vaut 0. Peut-être prévoyaient-ils de faire démontrer une inégalité *stricte*, et une coquille l'a transformée en inégalité large.

   On dissimule la constante $f(x_0)$ sous la forme $\pi_n^{\overline{f(x_0)}}$ et l'on majore $|f(x_0 + \frac{2t}{n}) - f(x_0)|$ par $\omega(\frac{2t}{n})$ – cela quand t est positif (voir la définition de ω). On doit donc couper en deux l'intégrale et effectuer la même démonstration sur $\mathbf{R}^-$. La fonction majorante est toujours localement intégrable (ω est continue[1]), et même intégrable grâce à la deuxième question admise (et les théorèmes de comparaison).

   On voit donc que l'on peut choisir $A = 1$ puisque $\int_{\mathbf{R}^+} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$ vaut $\frac{\pi}{3}$.

   (b) Il y a alors convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite π_n^f vers f car ω est uniformément continue (en effet f est continue) donc en particulier ω est continue en 0 et $\omega(\frac{1}{n}) \to 0$.

[1] Cela n'a d'ailleurs pas d'importance, car on va dans un instant faire disparaître ω en le majorant.

4. (a) On n'utilise en rien la continuité de f pour obtenir la majoration. Il est cependant bien sûr sans espoir de montrer que la convergence est uniforme : une limite uniforme de polynômes trigonométriques serait continue. Ainsi, la limite de $\omega(1/n)$ – qui existe par monotonie, ne pourra valoir 0 pour une f discontinue (c'est clair si l'on pense que ω est toujours au moins égal au plus grand saut de f).

   (b) Pour $(i) \Rightarrow (ii)$ on reprend la technique de démonstration de $II-2$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on introduit un η de la continuité de ω en 0, et on considère $0 < t' - t < \eta$.

   Pour $h' < t'$ et x quelconque, on a (en choisissant $h < t$ tel que $0 < h' - h < t' - t$) :

$$\begin{aligned} |f(x+h') - f(x)| &\leq |f(x+h') - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq \omega(t'-t) + \omega(t) \leq \varepsilon + \omega(t). \end{aligned}$$

   Il ne reste plus qu'à conclure.

   Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$ on pourrait utiliser la propriété de continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. Mais $|f(x+h) - f(x)| \leq \omega(h)$, et il n'y a qu'à quantifier.

   Enfin l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ demande de faire intervenir les hypothèses sur f : elle est uniformément continue sur $\mathbf{R}$, et l'écrire quantifie la continuité de ω en 0.

5. (a) On regrette que l'épreuve soit sans calculatrice (calculatrice de haut niveau : Maple, Mathematica) car cette question aurait permis de valoriser l'initiative du candidat.

   On voit par l'inégalité des accroissements que la clé est dans la majoration de $\int_{\mathbf{R}^+} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt$ par un. Mais peut-on la calculer, comme on a calculé celle où t figure à la puissance quatrième au dénominateur ? Des tentatives consistant à poser $f = \cos$ (et $x = 0$) dans I-5b sont possibles (jumelées avec des intégrations par parties).

   REMARQUE : Mathematica donne encore la réponse :

```
Integrate[Sin[x]^4/x^3,{x,0,Infinity}]
Log[4]
```

```
------
  2
```

On ne voit plus alors d'où va venir ce $\log 2$, mais par contre on comprend que l'on a de la marge dans la réalisation d'une majoration. On coupe en deux : sur $[0, a]$ on majore par $\sin t$ et sur $[a, \infty[$ on se débarrasse de $\sin^4 t$. Le majorant est $1 - \cos a + \frac{1}{2a^2}$. Sans calculatrice, on ne peut choisir le meilleur a. Mais $a = \frac{\pi}{3}$ donne déjà un majorant en $0,95...$, qui permet de conclure. Il est amusant de voir que ce $\pi/3$ est presque optimal. Une session Mathematica :

```
FindRoot[a^3 Sin[a]==1,{a,.5}]
{a -> 1.04879}
1-Cos[a]+1/(2a^2)/.%
0.955942

1-Cos[a]+1/(2a^2)/.a->N[Pi/3]
0.955945
```