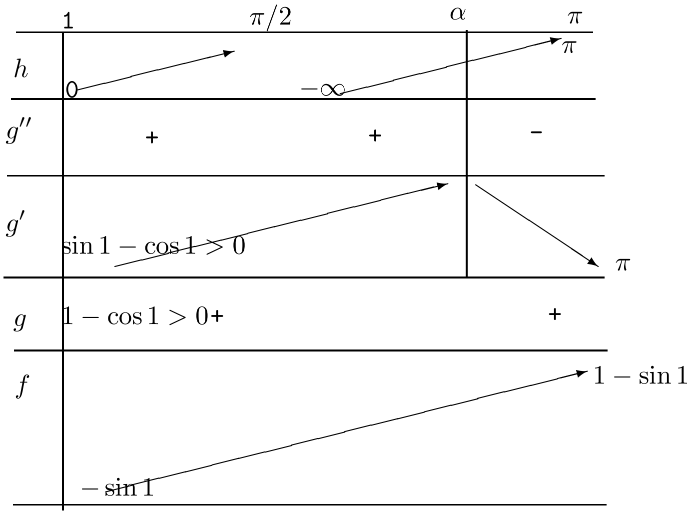
Concours commun polytechniques 1997

Mathématiques 2

Partie I

1 Encadrement

1.1 a) f est clairement négative sur $]0,1[$, positive sur $]e,+\infty[$. Reste l'intervalle $I=[1,e]$. f est dérivable sur cet intervalle, et $f'(x)=\dfrac{1-x\cos x}{x}$. Posons $g(x)=1-x\cos x$. g est dérivable sur I, et $g'(x)=-\cos x+x\sin x$. Continuons à dériver : $g''(x)=2\sin x+x\cos x=\cos x(x+2\tan x)$. Posons $h(x)=x+2\tan x$. On voit facilement que h est croissante sur $[1,\pi/2[$ et $]\pi/2,e]$, ce qui donne finalement le tableau de variations suivant (sur un intervalle plus large par commodité) :

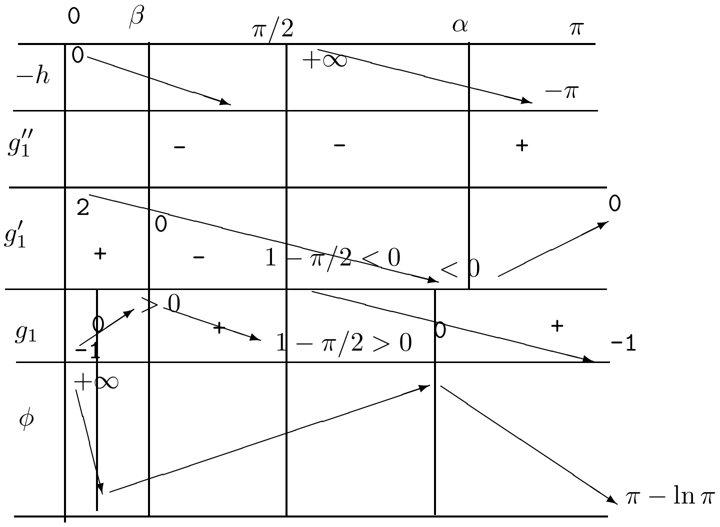


Donc f s'annule bien en un point ξ unique, qui appartient à $[1,e]$. Mais comme $\dfrac{\pi}{2}<e$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$. Donc $\xi\in\left[\dfrac{\pi}{2},e\right]$.

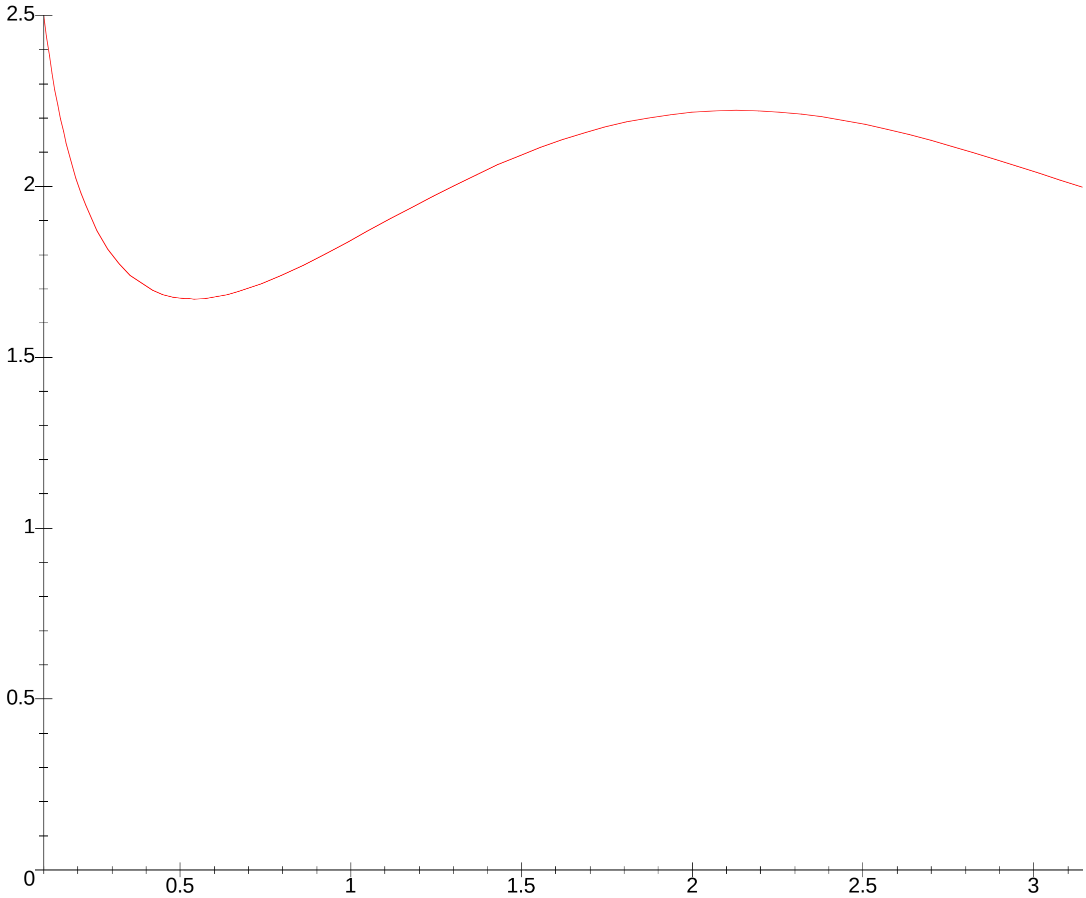
b) La majoration de $1/x$ par 1 ne suffit pas. On peut utiliser la concavité de $u\colon x\mapsto 1/x$. Le graphe de u est sous la corde joignant les points d'abscisses 1 et 2. Donc $\forall x\in[1,2]\quad \dfrac{1}{x}\leq\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}x$. En intégrant, nous obtenons $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}\leq\frac{3}{4}$. Or $\dfrac{3}{4}<1$, donc $\dfrac{3}{4}$ est inférieur à sa racine carrée, c'est-à-dire $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) De ceci résulte que $\ln 2<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par ailleurs, $2\pi>6$, donc $\dfrac{2\pi}{3}>2>\dfrac{\pi}{2}$. Comme sin est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, il en résulte $\sin 2>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $f(2)<0$, et on a bien $\xi\in[2,e]$.

1.2 a) Analogue à l'étude de f. On obtient comme fonctions auxiliaires $g_1(x)=x-1+x\cos x$, puis $g_1'(x)=1-x\sin x+\cos x$, puis $g_1''(x)=-\cos x(x+2\tan x)$. On retrouve l'opposée de la fonction h de **??**. Le tableau de variations de f est ainsi modifié :

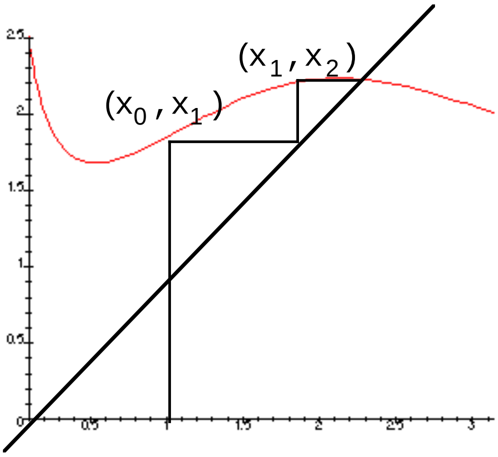


D'où un graphe très approximatif :



b) On trace sur le même graphe celui de Φ et la première bissectrice.

1.3 Méthode classique :



2 Cas général

2.1 Posons $\psi(x) = g(x) - x$. $\psi(a) \geq 0$, $\psi(b) \leq 0$. ψ étant continue sur $[a, b]$, elle s'annule au moins une fois sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui fournit bien une solution.

2.2 a) Il est clair par récurrence que $\forall m \in \mathbf{N}^\star \quad |x_{m+1} - x_m| \leq K^m |x_1 - x_0|$. Par inégalité triangulaire et sommation des termes d'une suite géométrique, il en résulte

$$\forall p > n \geq 1 \quad |x_n - x_p| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \tag{1}$$

Comme $0 \leq K < 1$, c'est que $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$, d'où le résultat.

b) La suite (x_n) est donc convergente. g étant continue, la limite est bien solution de (2-1). Supposons qu'il existe une autre solution $\chi \neq \xi$. Alors $|\chi - \xi| \leq K|\chi - \xi| < |\chi - \xi|$. Contradiction. D'où l'unicité, et la relation $\lim x_n = \xi$.

c) En passant à la limite $p \to \infty$ dans (**??**), on conclut.

2.3 a) Il suffit d'appliquer 2.2 en posant $K = \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)|$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis.

b) On a $\dfrac{\xi - x_{n+1}}{\xi - x_n} = \dfrac{g(\xi) - g(x_n)}{\xi - x_n}$ qui tend, par composition de limites et par définition de la dérivée, vers $g'(\xi)$.

2.4 g' étant continue sur $\mathcal{J}$, on peut affirmer :

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] = \mathcal{I} \quad |g'(x)| < 1$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad |g(x) - g(\xi)| \leq |x - \xi|$$

D'où $\forall x \in \mathcal{I} \quad |g(x) - \xi| \leq \varepsilon$, ce qui signifie bien que $g(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

2.5 a) $g(\xi) = \xi$ est évident. On trouve $g'(\xi) = \dfrac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$, d'où $g'(\xi) = 0$.

b) $g'(\xi) = 0$. On applique 2.4.

c) D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, appliquée à f sur $[x_n, \xi]$, on a, en posant $M = \sup_{\mathcal{I}} |f''|$, $|f(\xi) - f(x_n) - (\xi - x_n) f'(x_n)| \leq M \dfrac{(x_n - \xi)^2}{2}$. D'où, en divisant par $|f'(x_n)|$, $|x_{n+1} - \xi| \leq M \dfrac{(x_n - \xi)^2}{2|f'(x_n)|}$. On conclut en posant $C = \dfrac{M}{2 \inf_{\mathcal{I}} |f'|}$. Cette borne inférieure est non nulle par compacité.

Remarque : Si on prend une hypothèse un peu plus forte en supposant f de classe $\mathcal{C}^3$, on obtient un raisonnement beaucoup plus rapide en appliquant Taylor directement à g. On posera alors $C = \sup_{\mathcal{I}} |g''|$.

d) $g(x) = 2x - ax^2$.

e) a^{-1} est clairement l'unique point fixe de f. Posons $\mathcal{I} = \left[0, a^{-1}\right]$ (qui est stable par g et contient a^{-1}). g'' est constante, égale à $-2a$. On adonc d'après (2-8), $\forall n \geq 0 \quad |x_{n+1} - \xi| \leq a|x_n - \xi|^2$. Il en résulte par récurrence $|a^{-1} - x_n| \leq a^{2^n - 1} |a^{-1} - x_0|^{2^n} \leq a^{2^n - 1} (2^{-p})^{2^n}$

2.6 a) $\Phi_2'(\xi) = 1 - a_1 f'(\xi) = 0$ donc $a_1 = \dfrac{1}{f'(\xi)}$.

b) De même, en tenant compte de $f(\xi) = 0$, on trouve $a_1 = \dfrac{1}{f'(\xi)}$ et $a_2 = -\dfrac{f''(\xi)}{(f'(\xi))^3}$.

c) En dérivant Φ_q $q-1$ fois, et en tenant compte de $f(\xi) = 0$, on obtient un système triangulaire de $q-1$ équations à $q-1$ inconnues, du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 f'(\xi) & = & 1 \\ 2a_2 (f'(\xi))^2 + a_1 f''(\xi) & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (q-1)! a_{q-1} (f'(\xi))^{q-1} + \cdots & = & 0 \end{array}\right.$$

En tenant compte de $f'(\xi) \neq 0$, on montre ainsi que le système admet bien une solution unique.

2.7 ε est choisi en appliquant la question 2-4. La convergence provient de $\Phi_q'(\xi) = 0$. On applique ensuite la formule de Taylor-Lagrange à Φ_q, avec reste d'ordre q :

$$\exists c_n \in [x_n, \xi] \quad x_{n+1} = \xi + \frac{(x_n - \xi)^q}{q!} \Phi_q^{(q)}(c_n)$$

Par le théorème d'encadrement, c_n tend vers ξ si n tend vers l'infini. Le résultat demandé en découle, vue la continuité de $\Phi_q^{(q)}$.

3 Application aux polynômes

3.1 a) Le théorème de Rolle, appliqué à p sur chaque intervalle $I_k =]\xi_k, \xi_{k+1}[$ $(1 \leq k \leq n-1)$, montre qu'il existe $\alpha_k \in I_k$ tel que $p'(\alpha_k) = 0$. On obtient ainsi $n-1$ racines réelles, distinctes. Il ne peut y en avoir d'autres pour des raisons de degré. Ces racines vérifient :

$$\xi_1 < \alpha_1 < \xi_2 < \cdots < \alpha_{n-1} = \alpha < \xi_n$$

b) On va montrer que p est convexe. La convexité de p' se montre de la même façon, mais n'a aucun intérêt pour la suite. On peut suspecter une erreur d'énoncé.

En raisonnant comme ci-dessus (application du théorème de Rolle), on voit que toutes les racines de p'' sont simples et réelles, et que la plus grande est inférieure à α. Donc p'' est de signe constant sur $]\alpha, +\infty[$. Comme $\lim_{x \to \infty} p''(x) = +\infty$, c'est que p'' est positive sur $]\alpha, +\infty[$.

c) On a $g'(x) = \dfrac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}$. p, p' et p'' restent strictement positives sur $]\alpha, +\infty[$, donc g est strictement croissante sur $]\xi_n, +\infty[$. Donc $\forall x \in]\xi_n, +\infty[\quad g(x) > g(\xi_n) = \xi_n$. Donc $]\xi_n, +\infty[$ est stable par g. Donc la suite[1] (x_k) est minorée par ξ_n.

Par ailleurs $x_{k+1} - x_k = -\dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)} < 0$.

Donc la suite (x_k), décroissante et minorée, converge, vers un point fixe de g, c'est-à-dire une racine de p, supérieure ou égale à ξ_n, donc vers ξ_n.

3.2
- Premier cas : $\xi_n \leq 1$. L'inégalité demandée est alors évidente.
- Deuxième cas : $\xi_n > 1$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} |\xi_n^n| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\xi_n^i\right| \\ &\leq a_M \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_n^i| \\ &\leq a_M \frac{|\xi_n|^n - 1}{|\xi_n| - 1} \\ &\leq a_M \frac{|\xi_n|^n}{|\xi_n| - 1} \end{aligned}$$

D'où le résultat. On choisira alors $x_0 > 1 + a_M$.

3.3 On peut remplacer p par $p^{(m-1)}$, où m est l'ordre de multiplicité.

3.4 On trouve $x_0 = 4, x_1 = \dfrac{19}{8}, x_2 = \dfrac{553}{304}$.

3.5 a) On trouve ici $x_0 = 4, x_1 = -9, x_2 = -87$

b) La suite semble diverger. On constate en effet que $\sqrt{3}$ est point fixe répulsif de Φ : $|\Phi'(\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}| \approx 2,4 > 1$.

En revanche, comme on l'a vu, $g'(\sqrt{3}) = 0$.

4 Fonctions complexes

4.1 a) Comme $1 - |h'(\zeta)| > 0$, et d'après la définition de la limite, il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout z_0 tel que $0 < |z_0 - \zeta| < \epsilon$,

$$\left|\frac{h(z_0) - h(\zeta)}{z_0 - \zeta} - h'(\zeta)\right| < \frac{1}{2}(1 - |h'(\zeta)|)$$

Alors

$$\left|\frac{h(z_0) - h(\zeta)}{z_0 - \zeta}\right| - |h'(\zeta)| < \frac{1}{2}(1 - |h'(\zeta)|)$$

d'où le résultat.

b) Par récurrence, avec $C = \dfrac{1}{2}(1 + |h'(\zeta)|)$.

Partie II

[1] Il faut surtout éviter de noter cette suite (x_n), n étant déjà le degré de p !

1 Équations différentielles

1.1 Pour le cas (**a**) : $y = 2e^x - 1$.

Pour le cas (**b**) : $y = e^{-x^2/2}$.

1.2 On intègre l'équation différentielle entre 0 et x.

1.3 a) Par récurrence, on trouve respectivement $Y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1$ et $Y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k!}$.

b) On applique les résultats connus sur la série exponentielle, qui est de rayon de convergence infini.

1.4 Ultra-classique :

$$\begin{array}{rcll} z & = & A\,\mathrm{ch}(x\sqrt{k}) + B\,\mathrm{sh}(x\sqrt{k}) & \text{si } k > 0 \\ z & = & A\cos(x\sqrt{-k}) + B\sin(x\sqrt{-k}) & \text{si } k < 0 \\ z & = & Ax + B & \text{si } k = 0 \end{array}$$

1.5 a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $k > 0$, les valeurs propres sont $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$, associés aux sous-espaces propres respectifs vect $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \end{pmatrix}$ et vect $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{k} \end{pmatrix}$.

Si $k < 0$, les valeurs propres sont $i\sqrt{-k}$ et $-i\sqrt{-k}$, associés aux sous-espaces propres respectifs vect $\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{-k} \end{pmatrix}$ et vect $\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{-k} \end{pmatrix}$.

Si $k = 0$, la seule valeur propre est 0, le sous-espace propre est vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) On trouve

$$Y_n(x) \begin{pmatrix} \alpha \displaystyle\sum_{0 \le 2j \le n} \frac{k^j x^{2j}}{(2j)!} + \beta \displaystyle\sum_{0 \le 2j+1 \le n} \frac{k^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \alpha \displaystyle\sum_{1 \le 2j-1 \le n} \frac{k^j x^{2j-1}}{(2j-1)!} + \beta \displaystyle\sum_{0 \le 2j \le n} \frac{k^j x^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix}$$