Mathématiques 1 : corrigé.

Première partie.

1.1. Si $f \in \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (t,x) & \mapsto & \mathrm{e}^{-itx} f(t) \end{array}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$ et $\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2$,

$$|\mathrm{e}^{-itx} f(t)| = |f(t)| = \varphi(t)$$

qui est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ donc, en vertu du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

1.2.1. Si f est paire, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\hat{f}(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt} f(t)dt \underset{u=-t}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-ixu} f(-u) - du = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixu} f(u)du = \hat{f}(x)$$

Si f est à valeurs réelles, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\overline{\hat{f}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{e}^{-ixt} f(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt} f(t)dt = \hat{f}(-x)$$

Donc si f est à valeurs réelles et paire, $\hat{f}$ est paire, à valeurs réelles.

1.2.2. De même, si f est à valeurs réelles et impaire, $\hat{f}$ est impaire, à valeurs imaginaires pures.

1.3. Si $\hat{f}$ est impaire, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}[\hat{f}(x) - \hat{f}(-x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ixt} - \mathrm{e}^{ixt}}{2} f(t)dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) f(t)dt$$

De même, si $\hat{f}$ est paire, on montre que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) f(t)dt$$

1.4.1. • p est continue en tout point de $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ car affine sur chacun des intervalles ouverts $]0,1[$ et $]1, +\infty[$, continue en 1 car $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t) = \lim\limits_{t \to 1^+} 0 = 0 = p(1)$, et continue à droite en 0 car affine sur $[0,1]$. Par parit, p est continue sur $\mathbf{R}$.

• p est intégable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment et intégrable car nulle sur $[1, +\infty[$ donc intégrable sur $\mathbf{R}^+$; par parité, p est intégrable sur $\mathbf{R}$.

1.4.2. p est paire donc $\hat{p}$ est paire et $\forall x \in \mathbf{R}^*$,

$$\hat{p}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)p(t)dt = 2\int_0^1 (1-t)\cos(xt)dt = 2\left[(1-t)\frac{\sin(xt)}{x} - \frac{\cos(xt)}{x^2}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$\hat{p}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$

1.4.3. En vertu du développement en série entière de cos, $\forall x \in \mathbf{R}$ (y compris en 0 vu que $\hat{p}(0) = 1$),

$$\hat{p}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

donc $\hat{p}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (*a fortiori* $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbf{R}$ comme fonction somme d'une série entière. Le caractère $\mathcal{C}^1$ peut bien sûr être établi directement.

1.4.4. $\hat{p}$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc intégrable sur le segment $[0,1]$; $\forall x \in [1, +\infty[, |\hat{p}(x)| \leq \frac{4}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\hat{p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\hat{p}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et par parité sur $\mathbf{R}$.

1.5.1. • E_n est continue sur $\mathbf{R}$, intégrable sur $[1, +\infty[$ car $E_n(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et par parité intégrable sur $\mathbf{R}$.

• E_n est paire donc $\hat{E_n}$ est paire et

$$\hat{E_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) E_n(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \cos(xt) t^n \mathrm{e}^{-t} dt = 2 \,\Re e\, K_n$$

1.5.2. Remarquons que $\Re e(\alpha) > 0$ donc $\forall p \in \mathbf{Z}, \lim\limits_{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-\alpha t} = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$. D'où, si $n \in \mathbf{N}^*$,

$$K_n = \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} t^n}{-\alpha} \right]_0^A + \frac{n}{\alpha} \int_0^A t^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha t} dt \right\} = \frac{n}{\alpha} K_{n-1}$$

Or $K_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ donc par récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, K_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

1.5.3. $\hat{E_0}(x) = \dfrac{2}{1+x^2}, \hat{E_1}(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \hat{E_2}(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$

1.5.4. D'après 1.5.1., $\hat{E_n}(x) = 2.n! \Re e \left(\dfrac{1}{(1-ix)^{n+1}} \right) = \dfrac{2.n!}{(1+x^2)^{n+1}} \Re e (1+ix)^{n+1}$

Or, si on pose $\theta = \mathrm{Arctan}\, x, (1+ix)^{n+1} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\cos\theta} \right)^{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{\cos^{n+1}\theta}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$ (car $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \tan\theta$).

D'où, $\hat{E_n}(x) = \dfrac{2.n! \cos((n+1)\mathrm{Arctan}\, x)}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}$ qui est le résultat souhaité avec $\beta(n) = \frac{n+1}{2}$.

1.5.5. $\hat{E_n}$ est continue sur $\mathbf{R}$ (*cf.* 1.1.), intégrable sur le segment $[0,1]$ à ce titre, intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\hat{E_n}(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (résulte de 1.5.4. si $n \geq 1$ et de 1.5.3. pour $n = 0$), donc est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et par parité sur $\mathbf{R}$. Donc $\hat{E_n} \in \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

1.6. $\hat{f}$ est impaire et f est nulle hors de $[c,d]$ donc $\forall x \in \mathbf{R}, \hat{f}(x) = -i \displaystyle\int_c^d f(t) \sin xt dt$.D'où

$$\forall (a,b) \in (\mathbf{R}^{+*})^2, \int_a^b \frac{\hat{f}(x)}{x} dx = \int_a^b \left[\int_c^d \frac{-i \sin xt}{x} f(t) dt \right] dx = -i \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\sin xt}{x} dx \right] f(t) dt$$

en vertu du théorème d'intégration sur un segment pour les intégrales dépendant d'un paramètre vu que l'application

$$(t,x) \mapsto \frac{\sin xt}{x} f(t)$$

est continue sur $[c,d] \times [a,b]$.

Si $t=0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin xt}{x} dx = 0$ et sinon $\displaystyle\left|\int_a^b \frac{\sin xt}{x} dx\right| = \left|\int_{at}^{bt} \frac{\sin u}{u} du\right| \underset{\text{parité}}{=} \left|\int_{a|t|}^{b|t|} \frac{\sin u}{u} du\right| \leq M$

On a donc, si on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[c,d]} |f(t)|$,

$$\left|\int_a^b \frac{\hat{f}(x)}{x} dx\right| \leq \int_c^d M\|f\|_\infty dt \leq M\|f\|_\infty (d-c)$$

1.7. $\displaystyle\frac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(1+x^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x\ln x}$ qui n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ car $\displaystyle\int_2^X \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln 2))$ qui tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ donc $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(2+x^2)}$ n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ et *a fortiori* pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

1.8. Il n'existe pas $c,d \in \mathbf{R}, c<d$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ tels que $\hat{f}(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\ln(2+x^2)}$ car sinon, d'après 1.6.,

$$(a,b) \in (\mathbf{R}^{+*})^2 \mapsto \int_a^b \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(2+x^2)} dx$$

serait bornée, ce qui, compte-tenu de la positivité et de la continuité de $g : x \in \mathbf{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(2+x^2)}$ impliquerait l'intégrabilité de g sur $]0,+\infty[$ ce qui est faux d'après 1.7.

Deuxième partie.

2.1. En vertu du rappel et par parité, on sait que $h : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Comme $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective, on en déduit que $h\circ\varphi\times\varphi' = \dfrac{\mathcal{H}_0}{\sqrt{2}}$ est intégrable sur $\mathbf{R} = \varphi^{-1}(\mathbf{R})$ de même intégrale que h. Donc $\mathcal{H}_0$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0 = \sqrt{2\pi}$.

2.2.1. g_n est continue sur $\mathbf{R}$, paire et $g_n(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $g_n \in \mathcal{I}(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

2.2.2.1. En intégrant par parties dans I_n,

$$I_n = \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2} t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^A + \frac{1}{2n+1}\int_0^A t\mathrm{e}^{-t^2/2} t^{2n+1} dt \right\} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$$

2.2.2.2. On en déduit par récurrence que, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{I_n}{(2n)!} = \frac{I_0}{2^n n!}$$

2.2.3. On sait que $\forall x \in \mathbf{R}, \sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme égale à e^x. On en déduit que $\forall x \in \mathbf{R}, \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$ est convergente de somme égale à $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. En particulier cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

2.3. Si $x \in \mathbf{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $|\mathrm{e}^{-t^2/2} \cos xt| \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}$ qui est intégrable sur $\mathbf{R}$ donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2} \cos xt$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

2.4. Par parité de $\mathcal{H}_0$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\hat{\mathcal{H}}_0(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_0(t) \cos xt dt = 2\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}(-1)^n \frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\right) dt$$

x étant fixé, posons $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}(-1)^n \frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}$; alors f_n est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et

$$N_1(f_n) = \int_{\mathbf{R}^+} |f_n| = \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{x^{2n} I_0}{2^n n!}$$

La série $\sum N_1(f_n)$ est convergente, or $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ donc

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

soit

$$\hat{\mathcal{H}}_0(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}(-1)^n \frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!} dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} I_n$$

2.5. D'où $\hat{\mathcal{H}}_0(x) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} I_0}{2^n n!} = 2I_0 \mathrm{e}^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}$

2.6. $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-ixt}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ et dominée par $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ qui est continue intégrable sur $\mathbf{R}$
$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-ixt})$ existe et vaut $-it\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-ixt}$
$(x,t) \mapsto -it\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-ixt}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ et dominée par $\varphi_2(t) = |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}$ qui est continue intégrable sur $\mathbf{R}$.
En vertu du théorème de dérivation pour les intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-ixt} dt$

2.7. En intégrant par parties,

$$\varphi'(x) = \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left[i\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{e}^{-t^2/2} \right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} x\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{e}^{-t^2/2} dt \right\} = -x\varphi(x)$$

2.8. $(\mathrm{e}^{x^2/2}\varphi(x))' = \mathrm{e}^{x^2/2}[\varphi'(x) + x\varphi(x)] = 0$ d'où $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-x^2/2}$
Or $\varphi(0) = 2I_0 = \sqrt{2\pi}$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi(x) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

2.9. $\hat{\mathcal{H}}_0 = \lambda_0 \mathcal{H}_0$ avec $\lambda_0 = \sqrt{2\pi}$

Troisième partie.

3.1. $\mathcal{H}_1(t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2/2}$; $\mathcal{H}_2(t) = (4t^2 - 2)\mathrm{e}^{-t^2/2}$

3.2. Si $n \geq 1$, $G^{(n+1)}(t) = (-2tG(t))^{(n)} = -2tG^{(n)}(t) - 2nG^{(n-1)}(t)$ d'après la formule de Leibniz. D'où

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) \text{ et } \mathcal{H}_{n+1}(t) = 2t\mathcal{H}_n(t) - 2n\mathcal{H}_{n-1}(t)$$

3.3.1. $H_n'(t) = (-1)^n[2tG^{(n)}(t) + G^{(n+1)}(t)]\mathrm{e}^{t^2} = 2tH_n(t) - H_{n+1}(t)$

3.3.2. On en déduit : $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$

3.3.3. $\mathcal{H}_n'(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}[-tH_n(t) + H_n'(t)] = -t\mathcal{H}_n(t) + 2n\mathcal{H}_{n-1}(t)$

Quatrième partie.

4.1. Résulte du fait que $\mathcal{H}_n$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que $\mathcal{H}_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

4.2.1. En intégrant par parties,

$$\hat{\mathcal{H}}_1(t) = \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[-2\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_{-A}^{A} - 2ix\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt \right\} = -2ix\hat{\mathcal{H}}_0(x)$$

4.2.2. D'où, $\hat{\mathcal{H}}_1(x) = \lambda_1\hat{\mathcal{H}}_1(x)$ avec $\lambda_1 = -i\lambda_0$

4.3.1. Par le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (*cf.* 2.6.), on montre que $\hat{\mathcal{H}}_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(\hat{\mathcal{H}}_n)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it\mathrm{e}^{-ixt}\mathcal{H}_n(t)dt$$

d'où

$$\hat{\mathcal{H}}_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt}(2t\mathcal{H}_n(t) - 2n\mathcal{H}_{n-1}(t))dt = 2i(\hat{\mathcal{H}}_n)'(x) - 2n\hat{\mathcal{H}}_{n-1}(x)$$

4.3.2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_n) = \lambda_n\mathcal{H}_n \text{ avec } \lambda_n = (-i)^n\lambda_0$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après 2.9. et $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après 4.2.2.

Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ vraies pour un $n \geq 1$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{H}_{n+1}) &\underset{4.3.1.}{=} 2i(\lambda_n\mathcal{H}_n') - 2n\lambda_{n-1}\mathcal{H}_{n-1} \\
&\underset{3.3.3.,3.2.}{=} i\lambda_n(-\mathcal{H}_{n+1} + 2n\mathcal{H}_{n-1}) - 2n\lambda_{n-1}\mathcal{H}_{n-1} \\
&= (-i)^{n+1}\lambda_0\mathcal{H}_{n+1} - 2n\lambda_0[(-i)^{n+1} + (-i)^{n-1}]\mathcal{H}_{n-1} \\
&= (-i)^{n+1}\lambda_0\mathcal{H}_{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui établit $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.