

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES 1997

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et Objectifs

On désigne par $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} , par $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions f continues et intégrables sur \mathbb{R} (c'est-à-dire telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ existe, $|f(t)|$ désignant le module de $f(t)$).

On considère l'application linéaire \mathcal{F} de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par :

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \text{ où } \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction \hat{f} est appelée transformée de Fourier de la fonction f .

Après avoir étudié sur des exemples quelques propriétés de la transformée de Fourier dans la première partie, on détermine dans la deuxième partie la transformée de Fourier d'une fonction \mathcal{H}_0 . Dans une troisième partie, indépendante des deux précédentes, on introduit une suite de fonctions \mathcal{H}_n dont on détermine la transformée de Fourier dans une quatrième partie.

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie f désigne une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1.1/ Justifier l'existence et étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction \hat{f} .

1.2/ On suppose que la fonction f est à valeurs réelles.

1.2.1/ Montrer que si f est une fonction paire alors \hat{f} est une fonction paire et à valeurs réelles.

1.2.2/ Que peut-on dire de \hat{f} si la fonction f est impaire ?

1.3/ On suppose que la fonction \hat{f} est impaire; montrer qu'il existe un nombre complexe μ , que l'on explicitera, tel que :

$$\hat{f}(x) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.4/ **Premier exemple :**

On considère la fonction p définie sur \mathbb{R} par :

$$p(t) = 1 - t \text{ lorsque } t \in [0, 1]$$

$$p(t) = 0 \text{ lorsque } t \in]1, +\infty[$$

$$p(-t) = p(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

1.4.1/ Montrer que p appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1.4.2/ Expliciter $\hat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1.4.3/ La fonction \hat{p} est-elle de classe \mathcal{C}^1 (resp \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} ? Les réponses seront justifiées soigneusement.

1.4.4/ La fonction \hat{p} appartient-elle à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

1.5/ **Deuxième exemple :**

Pour tout entier naturel n on considère la fonction E_n définie sur \mathbb{R} par $E_n(t) = |t|^n e^{-|t|}$ où $|t|$ désigne la valeur absolue de t .

On se propose de déterminer la transformée de Fourier \hat{E}_n de cette fonction.

On considère la fonction K_n de la variable réelle x définie par :

$$K_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{(-1+ix)t} dt.$$

Pour simplifier l'écriture, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et on écrira

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

1.5.1/ Montrer que $E_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et exprimer $\hat{E}_n(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n .

1.5.2/ Exprimer K_n en fonction de n et α (on commencera par établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1} pour $n \geq 1$).

1.5.3/ Expliciter $\hat{E}_0(x)$, $\hat{E}_1(x)$, $\hat{E}_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.5.4/ Montrer qu'il existe une fonction β définie sur \mathbb{N} à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que :

$$\hat{E}_n(x) = \frac{2(n!) \cos[(n+1) \operatorname{Arctan} x]}{(1+x^2)^{\beta(n)}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.5.5/ La fonction \hat{E}_n appartient-elle à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

1.6/ Soient c et d deux nombres réels tels que $c < d$ et f une fonction appartenant $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$; on suppose que la fonction \hat{f} est impaire.

Montrer que la fonction $(a, b) \mapsto \int_a^b \frac{\hat{f}(x)}{x} dx$ est bornée lorsque (a, b) décrit $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

(On rappelle et on admettra que l'ensemble $\left\{ \left| \int_a^b \frac{\sin u}{u} du \right|, (a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\right\}$ est borné et on désignera par M sa borne supérieure).

1.7/ La fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x \ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

1.8/ Existe-t-il deux nombres réels c et d , avec $c < d$, et une fonction f de classe \mathcal{C}^0 telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$ et telle que $\hat{f}(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\ln(2+x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

DEUXIEME PARTIE

Transformée de Fourier de \mathcal{H}_0

Dans cette partie, on désigne par \mathcal{H}_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $\mathcal{H}_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ et on se propose de déterminer la transformée de Fourier $\hat{\mathcal{H}}_0$ de \mathcal{H}_0 en utilisant deux méthodes différentes.

2.1/ On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; en déduire que \mathcal{H}_0 est intégrable sur \mathbb{R} et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0(t) dt$.

Première méthode de calcul de $\hat{\mathcal{H}}_0$:

2.2/ On définit sur \mathbb{R} la suite de fonctions g_n par :

$$g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2.2.1/ Montrer que, pour tout n appartenant à \mathbb{N} , la fonction g_n appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.2/ On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2.1/ Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

2.2.2.2/ En déduire une expression simple de $\frac{I_n}{(2n)!}$.

2.2.3/ On considère la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$; en préciser le rayon de convergence et la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

2.3/ Vérifier que pour tout x réel, la fonction, définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$, est intégrable sur \mathbb{R} .

2.4/ Justifier avec soin l'égalité :

$$\hat{\mathcal{H}}_0(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2.5/ Dédire de ce qui précède une expression simple de $\hat{\mathcal{H}}_0(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Deuxième méthode de calcul de $\hat{\mathcal{H}}_0$:

Pour simplifier l'écriture, on convient de noter φ la fonction $\hat{\mathcal{H}}_0(x)$; on a donc

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2.6/ Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $\varphi'(x)$ peut s'obtenir par dérivation sous le signe d'intégration.

2.7/ En déduire que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (\mathcal{E}).

2.8/ Intégrer l'équation (\mathcal{E}), expliciter $\varphi(x) = \hat{\mathcal{H}}_0(x)$ et retrouver ainsi le résultat obtenu à la question 2.5/.

2.9/ Dédire de la question 2.5/ (ou 2.8/) qu'il existe un nombre réel λ_0 que l'on explicitera tel que : $\hat{\mathcal{H}}_0 = \lambda_0 \mathcal{H}_0$.

TROISIEME PARTIE

La suite (\mathcal{H}_n)

On définit sur \mathbb{R} deux suites de fonctions (H_n) et (\mathcal{H}_n) respectivement par :

$$H_0(t) = 1 \quad \text{et} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\mathcal{H}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

3.1/ Expliciter $\mathcal{H}_1(t)$ et $\mathcal{H}_2(t)$.

On suppose dans ce qui suit que $n \geq 1$.

3.2/ Pour simplifier, on note G la fonction définie sur \mathbb{R} par $G(t) = e^{-t^2}$ et $G^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ième}}$.

En remarquant que $G'(t) = -2tG(t)$ et en dérivant n fois cette égalité, établir une relation entre $H_{n+1}(t)$, $H_n(t)$, $H_{n-1}(t)$, t et n ; en déduire l'expression de $\mathcal{H}_{n+1}(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n .

3.3/

3.3.1/ En dérivant la relation $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} G^{(n)}(t)$ obtenir l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_n(t)$, $H_{n+1}(t)$ et t .

3.3.2/ Dédire de ce qui précède l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_{n-1}(t)$ et n .

3.3.3/ Exprimer $\mathcal{H}'_n(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n .

QUATRIEME PARTIE

Transformée de Fourier de \mathcal{H}_n

Dans cette partie, on désigne par \mathcal{H}_n les fonctions définies dans la troisième partie.

4.1/ Montrer que $\mathcal{H}_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2/ **Détermination de $\hat{\mathcal{H}}_1$.**

4.2.1/ Exprimer $\hat{\mathcal{H}}_1(x)$ en fonction de $\hat{\mathcal{H}}_0(x)$ et de x .

4.2.2/ Déterminer le nombre complexe λ_1 tel que :

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \lambda_1 \mathcal{H}_1.$$

4.3/ On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la fonction \mathcal{H}_n est une fonction propre de l'application linéaire \mathcal{F} définie dans l'introduction.

4.3.1/ Exprimer $\hat{\mathcal{H}}_{n+1}$ en fonction de $(\hat{\mathcal{H}}_n)'$, $\hat{\mathcal{H}}_{n-1}$ et n (on suppose $n \geq 1$).

4.3.2/ Établir par récurrence que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_n) = \hat{\mathcal{H}}_n = \lambda_n \mathcal{H}_n$$

où λ_n désigne un nombre complexe que l'on explicitera.