Concours Commun Polytechnique - Mathématiques 2 - 1997

Partie I

I.1. $BX = Z \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAY$

$\Leftrightarrow AX = Y$ (car A donc ${}^tA$ est inversible)

$\Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

Donc l'équation linéaire $BX = Z$ possède la solution unique X_0.

2. ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = B$

Donc B est symétrique.

B étant symétrique réelle : - son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$ - les sous-espaces propres de B sont 2 à 2 orthogonaux - il existe $P \in O(k)$ telle que $P^{-1}BP \in D_k(\mathbb{R})$

3. $< U, BU >= {}^tU^tAAU = \|AU\|^2 > 0$ ($U \neq 0$ et A inversible $\Rightarrow AU \neq 0$)

Soit $\lambda \in Spec(B)$ et U vecteur propre associé à B; alors $U \neq 0$ et $BU = \lambda U$.

D'où $\langle U, BU\rangle = \begin{cases} {}^tU^tAAU = \|AU\|^2 > 0 \\ \langle U, \lambda U\rangle = \lambda \|U\|^2 \end{cases}$ ${}^tU^tAAU = \|AU\|^2 > 0$

D'où $\lambda > 0$. On a montré que :

$$\boxed{Spec(B) \subset \mathbb{R}^{+*}}$$

4. Notons $(U_1, ..., U_k)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^k$ formée de vecteurs propres de B. Posons $V = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i$. Alors :

$\langle AV, AV\rangle = {}^tV^tAAV = {}^tVBV = \langle V, BV\rangle = \|AV\|^2$.

En outre :

$$\langle AV, AV\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i BU_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i U_i \right\rangle$$

$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i$ car $(U_1, ..., U_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^k$.

D'où $\lambda_{\text{mini}} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \leq \|AV\|^2 \leq \lambda_{\text{maxi}} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2$ et comme $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 1$ (V est unitaire)

a. $\boxed{\langle AV, AV\rangle = \langle V, BV\rangle = \|AV\|^2 \in [\lambda_{\text{mini}}, \lambda_{\text{maxi}}]}$

b. $\|BV\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i BU_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i U_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i^2 \right)^{1/2}$ car $(U_1, ..., U_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^k$. Or :

$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i^2 \right)^{1/2} \in \left[\lambda_{\text{mini}} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \right)^{1/2}, \lambda_{\text{maxi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \right)^{1/2} \right]$ car les λ_i sont positifs. Comme $\|V\| = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \right)^{1/2} = 1$,

$$\boxed{\|BV\| \in [\lambda_{\text{mini}}, \lambda_{\text{maxi}}]}$$

Si U est quelconque dans $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, $V = \dfrac{U}{\|U\|}$ est unitaire. En appliquant a; et b; à V, on obtient :

$\langle AU, AU\rangle = \langle U, BU\rangle = \|AU\|^2 \in \left[\lambda_{\text{mini}} \|U\|^2, \lambda_{\text{maxi}} \|U\|^2 \right]$

et
$\|BU\| \in [\lambda_{\text{mini}} \|U\|, \lambda_{\text{maxi}} \|U\|]$
relations qui sont encore vraies pour $U = 0$.
Donc : $\forall U \in \mathbb{R}^k$,

$$\boxed{\langle AU, AU\rangle = \langle U, BU\rangle = \|AU\|^2 \in \left[\lambda_{\text{mini}} \|U\|^2, \lambda_{\text{maxi}} \|U\|^2\right]}$$

$$\boxed{\|BU\| \in [\lambda_{\text{mini}} \|U\|, \lambda_{\text{maxi}} \|U\|]}$$

5. D'après la question 1., $R(X_0) = 0$ et $E(X_0) = 0$.
Si $U \neq X_0$, $BU - Z \neq 0$ et $E(U) \neq 0$.
<u>Donc il existe un unique vecteur $X \in \mathbb{R}^k$ rendant E minimale, c'est X_0.</u>
On a alors $\underline{E(X_0) = \min_{U \in \mathbb{R}^k} E(U) = 0}$.

<u>Partie II</u>

1. $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $f_i(\mu) = \|R(X_i + \mu D_i)\|^2$
$= \|B(X_i + \mu D_i) - Z\|^2$
$= \|BX_i - Z + \mu BD_i\|^2$
$= \|BX_i - Z\|^2 + 2\mu \langle BX_i - Z, BD_i\rangle + \mu^2 \|BD_i\|^2$
$= E(X_i) + 2\alpha\mu + \beta\mu^2$ avec :

$$\boxed{\alpha = \langle BX_i - Z, BD_i\rangle \text{ et } \beta = \|BD_i\|^2}$$

f_i est une fonction polynôme C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme $D_i \neq 0$ et B est inversible, $BD_i \neq 0$ et $\beta > 0$. f_i est donc du second degré et admet un minimum pour $f_i'(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Donc $\mu_i = -\dfrac{\langle BX_i - Z, BD_i\rangle}{\|BD_i\|^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\mu_i = -\frac{\langle R(X_i), BD_i\rangle}{\|BD_i\|^2}}$$

On a alors : $\min_{\mu \in \mathbb{R}} f_i(\mu) = f_i(\mu_i) = E(X_i) - 2\dfrac{\langle R(X_i), BD_i\rangle}{\|BD_i\|^2} \langle BX_i - Z, BD_i\rangle + \dfrac{\langle R(X_i), BD_i\rangle^2}{\|BD_i\|^4} \|BD_i\|^2$
$= E(X_i) - 2\dfrac{\langle R(X_i), BD_i\rangle}{\|BD_i\|^2} \langle R(X_i), BD_i\rangle + \dfrac{\langle R(X_i), BD_i\rangle^2}{\|BD_i\|^2}$. D'où :

$$\boxed{\min_{\mu \in \mathbb{R}} f_i(\mu) = E(X_i) - \frac{\langle R(X_i), BD_i\rangle^2}{\|BD_i\|^2}}$$

2. $f_i(\mu_i) = E(X_i) - \dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2}$
$= E(X_i) - \dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2}$
$= E(X_i) - \dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2} E(X_i)$ (car $E(X_i) = \|R(X_i)\|^2$)
$= E(X_i) \left(1 - \dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2}\right)$
D'où :

$$\boxed{f_i(\mu_i) = C_i E(X_i) \text{ avec } C_i = 1 - \frac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2}}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2 \leq \|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2$ et $C_i \geq 0$.
D'après la question I.3.,
$0 \leq \langle R(X_i), BR(X_i)\rangle \in \left[\lambda_{\text{mini}} \|R(X_i)\|^2, \lambda_{\text{maxi}} \|R(X_i)\|^2\right] \Rightarrow$
$\dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2} \in$
$\left[\lambda^2_{\text{mini}} \dfrac{\|R(X_i)\|^4}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2}, \lambda^2_{\text{maxi}} \dfrac{\|R(X_i)\|^4}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2}\right] \Rightarrow$
$\dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2} \in \left[\lambda^2_{\text{mini}} \dfrac{\|R(X_i)\|^2}{\|BR(X_i)\|^2}, \lambda^2_{\text{maxi}} \dfrac{\|R(X_i)\|^2}{\|BR(X_i)\|^2}\right]$
En outre, toujours d'après la question I.3.,
$\|BR(X_i)\|^2 \in \left[\lambda^2_{\text{mini}} \|R(X_i)\|^2, \lambda^2_{\text{maxi}} \|R(X_i)\|^2\right]$ et
$\dfrac{\|R(X_i)\|^2}{\|BR(X_i)\|^2} \in \left[\dfrac{1}{\lambda^2_{\text{maxi}}}, \dfrac{1}{\lambda^2_{\text{mini}}}\right]$.
On en déduit $\dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2} \in \left[\dfrac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}, \dfrac{\lambda^2_{\text{maxi}}}{\lambda^2_{\text{mini}}}\right] \Rightarrow$
$\dfrac{\langle R(X_i), BR(X_i)\rangle^2}{\|BR(X_i)\|^2 \|R(X_i)\|^2} \geq \dfrac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}$. On a montré :

$$\boxed{0 \leq C_i \leq 1 - \frac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}}$$

3. Supposons la suite (X_i) parfaitement définie, ce qui signifie $\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i \neq 0$.
(Dans le cas contraire, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$, $D_{i_0} = R(X_{i_0}) = 0 \Leftrightarrow X_{i_0} = A^{-1}Y = X_0$, $E(X_{i_0}) = 0$ et l'algorithme s'arrête : le test est non prévu)
On a alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{i+1}) = C_i E(X_i)$ (question 2.)
Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(X_i) \geq 0$ et $C_i \leq 1$, la suite $(E(X_i))$ est décroissante et minorée par 0, donc $(E(X_i))$ converge.
Posons $\theta = 1 - \dfrac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}$. Alors $\theta \in [0, 1[$ et d'après la question 2.,
$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq E(X_{i+1}) \leq \theta E(X_i) \Rightarrow$
$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq E(X_i) \leq \theta^{i-1} E(X_1)$ (récurrence simple)
On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{i \to +\infty} E(X_i) = 0}$$

On a alors
$$\begin{aligned}\|B(X_i - X_0)\|^2 &= \|BX_i - Z - (BX_0 - Z)\|^2 \\ &= \|BX_i - Z\|^2 \text{ (car } BX_0 = Z) \\ &= \|R(X_i)\|^2 \\ &= E(X_i)\end{aligned}$$
De plus, $\|B(X_i - X_0)\|^2 \geq \lambda^2_{\text{mini}} \|X_i - X_0\|^2$.
Donc : $\|X_i - X_0\|^2 \leq \dfrac{E(X_i)}{\lambda^2_{\text{mini}}}$ $(\lambda^2_{\text{mini}} > 0)$. Comme $\lim\limits_{i \to +\infty} E(X_i) = 0$, $\lim\limits_{i \to +\infty} \|X_i - X_0\|^2 = 0$ et

$$\boxed{\lim_{i \to +\infty} X_i = X_0}$$

4. $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \|X_i - X_0\|^2 \leq \dfrac{E(X_i)}{\lambda^2_{\text{mini}}} \leq \dfrac{\theta^{i-1}E(X_1)}{\lambda^2_{\text{mini}}}$.

Pour un nombre d'itérations donné, la précision sera influencée par le facteur $\theta = 1 - \dfrac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}$. Plus il est proche de 0, plus la convergence est rapide. Cela correspond à $\dfrac{\lambda^2_{\text{mini}}}{\lambda^2_{\text{maxi}}}$ proche de 1 ou encore un spectre de B concentré dans une plage éloignée de 0.

Partie III

Logiciel de calcul employé : MAPLE

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> val_mini:=proc(X) ;
> val_maxi:=proc(X) ;
```

1.a.

```
> A:=matrix([[4,0,1],[0,4,-1],[-2,1,8]]);
> Y:=vector([6,-6,13]);
```

1.b.

```
> B:=multiply(transpose(A),A);
> Z:=multiply(transpose(A),Y);
```

2.

```
> X:=vector([0,0,0]):
> for n from 1 to 10 do
d:=evalf(matadd(multiply(B,X),Z,1,-1));
# calcul de la direction de descente
T:=multiply(B,d);
mu:=-dotprod(d,T)/dotprod(T,T);
# calcul de mu
X:=matadd(X,d,1,mu); # calcul de X
od:
print(`X(10)=`,X);
```

$$\boxed{\text{X(10)=[.9999995725, -1.000000508, 1.999999548]}}$$

3.a.

```
> theta:=evalf(1-(val_mini(B)/val_maxi(B))^2);
> # calcul du coefficient theta
```

$$\boxed{\text{theta := .9477756523}}$$

3.b.

On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) \leq \theta^n E(X_1)$. Donc $\theta^n \leq \dfrac{1}{1000} \Rightarrow$
$E(X_{n+1}) \leq E(X_1)/1000$.

Or $\theta^n \leq \dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow n \ln\theta \leq -\ln(1000)$

$$\Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(1000)}{\ln(\theta)}$$

$$\boxed{\text{Donc si } n_0 \text{ est la partie entière de } -\frac{\ln(1000)}{\ln(\theta)} + 1,\ E(X_{n_0+1}) \leq \theta^{n_0}E(X_1)}$$

> n:=floor(-ln(1000)/ln(theta))+1;
> # n est le nombre d'itérations demandé

$$\boxed{\text{n=129}}$$

$\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty$

Rédigé par

$Pierre\ Bron$, $professeur\ de\ Spéciales\ TSI$
$Lycée\ Chaptal$, 6, $allée\ Chaptal$, 22000 $StBrieuc$
Tel. 0296639414
$Email$: 106233.3407@$COMPUSERVE.COM$

à l'aide de Scientific Workplace