CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE TSi

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est interdit pendant cette épreuve.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

NOTATIONS UTILISÉES :

Dans tout le problème, k désigne un entier strictement positif, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à k lignes et k colonnes.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^k$, rapporté à sa base canonique, est muni du produit scalaire usuel auquel est associée la norme euclidienne correspondante. Les vecteurs éléments de $\mathbb{R}^k$ sont notés sous forme de matrice colonne (représentant les composantes dans la base canonique).

Si M est une matrice à coefficients réels, ${}^tM$ est la matrice transposée de M. Si M et N sont deux matrices, on note $M.N$ le produit matriciel si celui-ci est défini.

U et V étant deux éléments de $\mathbb{R}^k$, on note $\langle U, V\rangle$ leur produit scalaire. Celui-ci correspond à un produit matriciel :

$$\langle U, V\rangle = {}^tU.V = {}^tV.U.$$

La norme euclidienne d'un vecteur U de $\mathbb{R}^k$ s'écrit alors : $\|U\| = (\langle U, U\rangle)^{1/2} = \left({}^tU.U\right)^{1/2}$.

PRÉSENTATION :

Dans tout le problème A est une matrice inversible élément de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$, et Y un vecteur fixé de $\mathbb{R}^k$.
On sait alors qu'il existe un unique vecteur X de $\mathbb{R}^k$ solution de l'équation linéaire : $A.X = Y$.
Ce vecteur est noté X_0 dans tout le problème (remarque : on a donc $X_0 = A^{-1}.Y$).
Le but du problème est de construire une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ convergeant vers X_0 lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire telle que : $\|X_n - X_0\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

– Dans la partie I, on établit quelques résultats théoriques.
– Dans la partie II, on construit la suite recherchée.
– Dans la partie III, on décrit un algorithme.

N.B. : On pourra, pour continuer, admettre et utiliser tous les résultats donnés dans l'énoncé.
On pose, par ailleurs, $B = {}^tA.A$ et $Z = {}^tA.Y$. Ces notations sont conservées dans tout le problème.

I - PARTIE

I-1- Montrer qu'il existe un unique vecteur X de $\mathbb{R}^k$ solution de l'équation linéaire $B.X = Z$ et que c'est le vecteur X_0.

I-2- Montrer que la matrice B est symétrique. Rappeler les propriétés essentielles des valeurs propres de B et des sous-espaces propres associés.

I-3- Soit U un élément quelconque non nul de $\mathbb{R}^k$, montrer que $\langle U, B.U\rangle$ est positif, en déduire que les valeurs propres de B sont strictement positives.

On distingue par λ_{mini} et λ_{maxi} respectivement le minimum et le maximum de ces valeurs propres que l'on pourra noter λ_i pour i allant de 1 à k.

I-4- Soit V un vecteur unitaire quelconque de $\mathbb{R}^k$. En utilisant une base orthonormale remarquable de $\mathbb{R}^k$ associée à B, montrer que :

a) $\langle A.V, A.V\rangle = \langle V, B.V\rangle = \|A.V\|^2$ est dans l'intervalle $[\lambda_{\text{mini}}, \lambda_{\text{maxi}}]$.

b) $\|B.V\|$ est dans l'intervalle $[\lambda_{\text{mini}}, \lambda_{\text{maxi}}]$.

Que deviennent ces deux dernières propriétés si on remplace le vecteur unitaire V par un vecteur U quelconque de $\mathbb{R}^k$?

I-5- On définit une application R de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ en posant $R(U) = B.U - Z$ et une application E de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ par $E(U) = \|R(U)\|^2$, pour tout U vecteur élément de $\mathbb{R}^k$.

Démontrer qu'il existe un unique vecteur X élément de $\mathbb{R}^k$ pour lequel E est minimale c'est-à-dire tel que :

$$E(X) = \text{minimum}_{U\in\mathbb{R}^k} E(U),$$

que ce vecteur n'est autre que X_0 et qu'on a donc :

$$\text{minimum}_{U\in\mathbb{R}^k} E(U) = E(X_0) = 0.$$

II - PARTIE

II-1- Soit i un entier strictement positif.

Soient X_i et D_i deux éléments de $\mathbb{R}^k$, avec D_i non nul. (D_i est appelé direction de descente).

Soit f_i la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_i(\mu) = E(X_i + \mu D_i)$.

Donner les deux réels α et β tels que : $f_i(\mu) = E(X_i) + 2\alpha\mu + \beta\mu^2$.

En déduire que f_i admet un minimum pour $\mu_i = -\dfrac{\langle R(X_i), B.D_i\rangle}{\|B.D_i\|^2}$

et que cette valeur minimale est : $E(X_i) - \dfrac{(\langle R(X_i), B.D_i\rangle)^2}{\|B.D_i\|^2}$.

II-2- On pose $D_i = R(X_i)$ que l'on suppose non nul.

Montrer que dans ce cas $f_i(\mu_i) = C_i E(X_i)$, avec $C_i = 1 - \dfrac{(\langle R(X_i), B.R(X_i)\rangle)^2}{\|R(X_i)\|^2\,\|B.R(X_i)\|^2}$.

Majorer et minorer C_i en fonction des valeurs propres de B.

II-3- On fixe un vecteur X_1 de $\mathbb{R}^k$ puis on réalise les itérations suivantes (pour i naturel) :

$$\begin{cases} D_i = R(X_i), \quad E_i = E(X_i) \\ \mu_i = -\dfrac{\langle D_i, B.D_i\rangle}{\|B.D_i\|^2} \\ X_{i+1} = X_i + \mu_i D_i \end{cases}$$

Justifier la convergence de la suite $E(X_i)$ pour i tendant vers l'infini.

Montrer que cette suite tend vers zéro quand i tend vers l'infini.

En déduire que X_i tend vers X_0 quand i tend vers l'infini.

II-4- On fixe le nombre d'itérations, quel facteur dépendant de B a une grande influence sur la précision obtenue ?

III - PARTIE

On se propose de mettre en oeuvre la suite vue en **II-3-** pour le système particulier : $AX = Y$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Préciser le logiciel de calcul formel (ou de programmation) **utilisé.**

N.B. Dans le cas d'un logiciel de programmation, on supposera déjà définis une procédure (ou une fonction) permettant d'obtenir le produit de deux matrices, et deux fonctions (ou procédures) donnant d'une part la plus grande valeur propre, d'autre part la plus petite valeur propre d'une matrice. On demande dans ce cas au candidat d'écrire uniquement l'en-tête de ces procédures et fonctions.

A, Y, B, Z seront des symboles (ou variables) globaux.

III-1- Donner les instructions nécessaires pour :

- **a)** définir ou initialiser ou entrer A et Y,
- **b)** calculer B et Z.

III-2- On veut réaliser 10 itérations à partir du vecteur nul.

Donner les instructions nécessaires aux opérations suivantes :

- **a)** calcul de la direction de descente D_i,
- **b)** calcul du paramètre μ_i,
- **c)** calcul de X_{i+1}.

Donner une instruction permettant de réaliser les itérations.

III-3- Quelles instructions permettent de calculer :

- **a)** le coefficient de la question **II-4-**.
- **b)** le nombre n d'itérations pour être certain que, à partir du vecteur nul X_1, l'on ait :

$$E(X_{n+1}) < E(X_1)/1000.$$