Concours ESTP - ENSAM Filière MP

SESSION 1997

Mathématiques 3

Problème I

I-1°) L'application f est bien à valeurs dans E, et sa linéarité f s'écrit $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(a, b) \in E^2$, et résulte de l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\lambda a_n + \mu b_n) + 2(\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) = \lambda(a_n + 2a_{n+1}) + \mu(b_n + 2b_{n+1}).$$

$$\underline{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

$a \in \ker f$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$. Le noyau est donc la droite constituée des suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$:

$$\underline{\ker f = Vect(d) \text{ où } d = \left((-2)^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}}$$

I-2°) (a) L'application $\Psi : E \to \mathbb{R}$ qui à $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe son premier terme a_0 est évidemment une forme linéaire, non nulle puisque $\Psi(d) = 1$ où $d = \left((-2)^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Il en résulte que $F = \ker \Psi$ est un hyperplan de E, et comme $d \notin F$, on établit classiquement que $E = F \bigoplus Vect(d)$ ou encore

$$F \bigoplus \ker f = E$$

D'après le cours, $g = f|_F$ est une bijection de F sur $\operatorname{Im} f$. Pour voir que

$$\underline{\text{la restriction de } f \text{ à } F \text{ est une bijection de } F \text{ sur } E}$$

il suffit de prouver que f est surjective. Pour cela, à $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on associe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions $a_0 = 0$ et $a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^{k-n}\alpha_k$ pour $n \geq 1$. Alors $a_0 + 2a_1 = \alpha_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_n + 2a_{n+1} &= -\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^{k-n}\alpha_k - 2\sum_{k=0}^{n}(-2)^{k-n-1}\alpha_k \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^{k-n}\alpha_k + \sum_{k=0}^{n-1}(-2)^{k-n}\alpha_k + \alpha_n = \alpha_n \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\alpha = f(a)$. Notons que $a \in F$, donc $a = g^{-1}(\alpha)$.

(b) Soit $a \in F$ et $\alpha = f(a)$. D'après ce qui précède, $a_0 = 0$ et $a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{k-n} \alpha_k$ pour $n \geq 1$. Donc $0 \leq |a_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n} |\alpha_k| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k|$. Puisque $\lim_n \alpha_n = 0$, on a $2^n |\alpha_n| = o(2^n)$; or la série $\sum 2^n$ est (trivialement) divergente; par sommation des relations de comparaison sur les séries positives divergentes, on en déduit $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right)$. Or $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 \sim 2^n$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o(2^n)$, soit $\lim_n \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = 0$. Par théorème d'encadrement, il vient $\lim_n |a_n| = 0$, ou encore

$$\underline{\lim_n a_n = 0.}$$

I-3°) Soit $\alpha \in E$. La suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $a_0 = 0$ et $a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{k-n} \alpha_k$ pour $n \geq 1$ vérifie $f(a) = \alpha$. On a alors $f(b) = \alpha \Longleftrightarrow f(b) = f(a) \Longleftrightarrow b - a \in \ker f$ donc

$$\boxed{\begin{array}{c} f(b) = \alpha \Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n + K(-2)^{-n} \\ \text{avec } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{k-n} \alpha_k \end{array}}$$

Pour l'étude de la limite, on cherche à exploiter la question précédente. En identifiant la suite constante égale à l avec l, on a $f(l) = 3l$ donc $\alpha - l = f\left(b - \frac{1}{3}l\right)$. Or $A = \ker f \bigoplus F$ donc $b - \frac{1}{3}l = a + a'$ avec $a \in \ker f$ et $a' \in F$. Mais alors $f(a') = \alpha - l$ et $\alpha - l$ converge vers 0, donc a' converge vers 0. Comme a est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$, elle converge aussi vers 0. Il en résulte que $b - \frac{1}{3}l$ converge vers 0, et donc

$$\boxed{\lim_n b_n = \frac{1}{3}l.}$$

II-1°) Constatons que la suite u est bien définie et à valeurs positives, et même $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{1}{3}$. La suite u ne peut converger, sinon sa limite l vérifie $l = 1 + \sqrt{l^2} = 1 + l$ (car $l \geq \frac{1}{3} \geq 0$).

Il reste à montrer que

$$\boxed{\lim_n u_n = +\infty}$$

en établissant que u est croissante. Pour cela, on raisonne par récurrence sur n pour établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq u_n$.

- pour $n = 0$: $u_2 = 1 + \dfrac{1}{3} \geq u_1 = \dfrac{1}{3} = u_0$;
- si le résultat est vrai à l'ordre n, alors

$$u_{n+3} - u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_{n+2}} - \sqrt{u_n u_{n+1}} = \sqrt{u_{n+1}}\frac{u_{n+2} - u_n}{\sqrt{u_{n+2}} + \sqrt{u_n}} \geq 0$$

donc $u_{n+3} \geq u_{n+2} \, (\geq u_{n+1})$.

II-2°) Montrons que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{3} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1.}$$

D'une part, par croissance de u, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}} \leq 1 + \sqrt{u_{n+1}^2} = 1 + u_{n+1}$$

ce qui établit la seconde inégalité.
Exploitons ceci pour voir que, pour $n \geq 1$,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}} - u_{n+1} \geq 1 + \sqrt{(u_{n+1} - 1)\, u_{n+1}} - u_{n+1} = 1 + \varphi(u_{n+1})$$

où $\varphi(x) = \sqrt{(x-1)\,x} - x$ est définie sur $[1, +\infty[$. On constate que $\varphi(u_2) = \dfrac{-2}{3}$.
Comme $u_{n+1} \geq u_2$ pour $n \geq 1$, il suffit d'établir que φ est croissante pour obtenir $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 1 + \dfrac{-2}{3} = \dfrac{1}{3}$. Or φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{(x-1)\,x}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)^2}{2\sqrt{(x-1)\,x}} \geq 0$$

II-3°) On calcule facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \alpha_{n+1} = 2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$$

Comment faire le lien avec ce qui précède ? Constatons que

$$u_{n+1} + u_n = \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 + 2\sqrt{u_n u_{n+1}} = \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 + 2u_{n+2} - 2$$

donc
$$\alpha_{n+1} = 2 - (\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}})^2$$
Mais
$$\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}} = \frac{u_n - u_{n+1}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}$$
converge vers 0, puisque $u_n - u_{n+1}$ est bornée et $\lim_n \sqrt{u_n} = \lim_n \sqrt{u_{n+1}} = +\infty$. On en déduit
$$\boxed{\lim_n \alpha_n = 2.}$$
D'après la question I-3., on en déduit
$$\boxed{\lim_n v_n = \frac{2}{3}.}$$

II-4°) On a $u_{n+1} = u_n + v_n$. Comme $\lim_n v_n = \dfrac{2}{3}$ et $\lim_n u_n = +\infty$, le terme v_n est négligeable devant le terme u_n et
$$\boxed{u_{n+1} \sim u_n.}$$
La série $\sum \alpha_n$ est trivialement divergente, puisque $\alpha_n \sim 2$. D'après un théorème de sommation (on a bien $\alpha_n \geq 0$ car $v_n \geq 0$), il en résulte que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sim \sum_{k=0}^{n} 2 = 2\,(n+1)$ donc
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sim 2n}$$
Mais
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + 2\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} = u_n + 2u_{n+1} - 2u_0 \sim 3u_n$$
car $\lim_n \left(\dfrac{u_n}{u_n} + \dfrac{2u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{2u_0}{u_n}\right) = 1 + 2 - 0 = 3$ puisque $u_{n+1} \sim u_n$. Il en résulte
$$\boxed{u_n \sim \frac{2n}{3}.}$$

II-5°) D'après un calcul vu à la question 3°)
$$w_{n+1} \quad = \quad \alpha_{n+1} - 2 = -\,(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}})^2 = -\left(\frac{v_{n+1}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\right)^2$$

$$= -\frac{v_{n+1}^2}{u_n\left(1+\sqrt{\frac{u_{n+1}}{u_n}}\right)^2} \sim -\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2n}{3}\times 4}$$

donc,

$$\boxed{w_n \sim \frac{-1}{6n}.}$$

II-6°) (a) On cherche à exploiter le résultat précédent:

$$\beta_n = b_n + 2b_{n+1} = u_n + 2u_{n+1} - 2n - \frac{4}{3}$$

Or d'après un calcul antérieur

$$u_n + 2u_{n+1} = 2u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \frac{2}{3} + \sum_{k=0}^{n} (w_k + 2) = \frac{5}{3} + 2n + \sum_{k=0}^{n} w_k$$

donc

$$\beta_n = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n} w_n$$

Toujours par théorème de sommation sur les séries divergentes positives,

$$-\sum_{k=0}^{n} w_n \sim \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{6}$$

et la constante étant négligeable devant ce terme,

$$\boxed{\beta_n \sim -\frac{\ln n}{6}.}$$

(b) On a $b_{n+1} - b_n = v_{n+1} - \frac{2}{3}$ donc

$$\boxed{\lim_n (b_{n+1} - b_n) = 0.}$$

On a $\beta_n = b_n + 2b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 3b_n$. Comme $\lim_n \beta_n = +\infty$ et $\lim_n (b_{n+1} - b_n) = 0$, sans difficulté

$$\boxed{\lim_n b_n = +\infty.}$$

(c) Mieux: par négligeabilité, $3b_n = \beta_n - 2(b_{n+1} - b_n) \sim -\dfrac{\ln n}{6}$ d'où il vient

$$\boxed{b_n = -\frac{\ln n}{18} + o(\ln n)}$$

On en déduit

$$\boxed{u_n = \frac{2n}{3} - \frac{\ln n}{18} + o(\ln n)}$$

Problème II

1°) Clairement, $\ker(f) \subset \ker(f^* \circ f)$. Réciproquement, pour tout $x \in \ker(f^* \circ f)$, $\|f(x)\|^2 = \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = \langle x, 0_E\rangle = 0$ donc $x \in \ker(f)$.

$$\boxed{\ker(f) = \ker(f^* \circ f).}$$

D'après le cours, $f^* \circ f$ est auto-adjoint et $(\ker(f))^\perp = (\ker(f^* \circ f))^\perp = \operatorname{Im}(f^* \circ f)^* = \operatorname{Im}(f^* \circ f)$

$$\boxed{\operatorname{Im}(f^* \circ f) = (\ker(f))^\perp.}$$

2°) (a) On a: $f \in GL(E) \cap A \Longleftrightarrow f^* \circ f = I_E \Longleftrightarrow f \in O(E)$

$$\boxed{GL(E) \cap A = O(E).}$$

(b) Si f est un projecteur orthogonal, alors $f^* = f$ et $f \circ f^* \circ f = f \circ f \circ f = f$ (car $f \circ f = f$) donc $f \in A$.

$$\underline{A \text{ contient les projecteurs orthogonaux.}}$$

3°) D'après le cours, $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $(f^* \circ f) \circ (f^* \circ f) = f^* \circ f$ et $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f$, donc si et seulement si $f^* \circ f \circ f^* \circ f = f^* \circ f$ puisque $f^* \circ f$ est toujours auto-adjoint. Cette condition équivaut à : $\forall x \in E$, $f^* \circ f[f^* \circ f(x) - x] = 0_E$, ou encore à $\forall x \in E$, $f^* \circ f(x) - x \in \ker(f^* \circ f)$, ou enfin, puisque $\ker(f^* \circ f) = \ker f$, à $\forall x \in E$, $f \circ f^* \circ f(x) - f(x) = 0_E$, c'est-à-dire à $f \in A$.

$$\underline{f \in A \text{ si et seulement si } f^* \circ f \text{ est un projecteur orthogonal.}}$$

4°) Si $f \in A$, alors $f^* \circ f$ est un projecteur d'image $(\ker(f))^{\perp}$ donc pour tout $x \in (\ker(f))^{\perp}$, $f^* \circ f(x) = x$ d'où $\|x\|^2 = \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2$ et l'on a bien $\|f(x)\| = \|x\|$ pour $x \in (\ker(f))^{\perp}$.
Réciproquement, il s'agit d'établir que $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal, ou tout simplement qu'il s'agit d'un projecteur puisque $f^* \circ f$ est auto-adjoint. Or cette application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions aux espaces supplémentaires $\ker f$ et $(\ker(f))^{\perp}$. Elle est nulle sur $\ker f$; il reste à établir que $f^* \circ f(x) = x$ pour $x \in (\ker(f))^{\perp}$.
Soit donc $x \in (\ker(f))^{\perp}$. Alors $y = f^* \circ f(x) - x \in (\ker(f))^{\perp}$, et $x + y \in (\ker(f))^{\perp}$. Grâce à l'hypothèse,

$$\begin{aligned}
2\langle f(x), f(y)\rangle &= \|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \\
&= \|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 2\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\langle f^* \circ f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$ donc $\langle f^* \circ f(x) - x, y\rangle = 0$, puis $f^* \circ f(x) - x = 0_E$ puisque $y = f^* \circ f(x) - x$. Ceci achève la démonstration.

$$\underline{f \in A \text{ si et seulement si } \forall x \in (\ker(f))^{\perp},\ \|f(x)\| = \|x\|.}$$

5°) Puisque $f \in A$, $f^* \circ f$ est un projecteur, et tout $x \in E$ se décompose suivant $x = x - f^* \circ f(x) + f^* \circ f(x) \in \ker(f^* \circ f) \bigoplus \mathrm{Im}(f^* \circ f) = \ker f \bigoplus (\ker(f))^{\perp}$. Alors

$$\begin{aligned}
& \|x - f^* \circ f(x)\|^2 \\
= \;& \|x\|^2 - \|f^* \circ f(x)\|^2 \text{ (théorème de Pythagore)} \\
= \;& \|x\|^2 - \|f \circ f^* \circ f(x)\|^2 \text{ (d'après 4°) puisque } f^* \circ f(x) \in (\ker(f))^{\perp}\text{)} \\
= \;& \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 \text{ (car } f \in A)
\end{aligned}$$

Comme $f^* \circ f$ est un projecteur d'image $(\ker(f))^{\perp}$, il en résulte

$$x \in (\ker(f))^{\perp} \Longleftrightarrow x = f^* \circ f(x) \Longleftrightarrow \|x - f^* \circ f(x)\| = 0 \Longleftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|$$

soit

$$\boxed{(\ker(f))^{\perp} = \{x \in E; \|f(x)\| = \|x\|\}.}$$

6°) On a vu que $O(E) = GL(E) \cap A \subset A$. Puisqu'on travaille en dimension finie, l'application linéaire (respectivement bilinéaire) $u \in L(E) \to (u, u^*)$ (resp.

$(u, v) \in L(E)^2 \to u \circ v)$ est continue. Par composition, $\Phi : u \in L(E) \to u \circ u^*$ est continue et $O(E) = \Phi^{-1}(\{I_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un singleton, donc d'un fermé. Ainsi $O(E) = O(E) \cap A$ est un fermé de A.
D'autre part, comme complémentaire d'un fermé, $\mathbb{R}^*$ est ouvert, et l'application multilinéaire det étant continue, $GL(E) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert, donc $O(E) = GL(E) \cap A$ est un ouvert de A.

$$\underline{O(E) \text{ est un ouvert et un fermé de } A.}$$

7°) Si f est nul, alors sa norme aussi. Sinon, d'après le cours, cette norme subordonnée dans un espace euclidien se calcule aussi par la relation $N(f)^2 = N(f^* \circ f)$. Or $f^* \circ f$ est un projecteur (non nul) donc $N(f^* \circ f) = 1$ puisque d'une part, d'après le théorème de Pythagore

$$\|f^* \circ f(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - f^* \circ f(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

donc $N(f^* \circ f) \leq 1$ et d'autre part, pour $x \in \mathrm{Im}(f^* \circ f)$, $\|f^* \circ f(x)\| = \|x\| \leq N(f^* \circ f)\|x\|$ d'où $N(f^* \circ f) \geq 1$ en choisissant x non nul, ce qui est possible puisque $f^* \circ f$ n'est pas nul. D'où

$$\underline{N(f) = 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } N(f) = 1 \text{ sinon.}}$$